VORLESUNGEN

ÜBER

MATHEMATIK

VON

LEOPOLD KRONECKER.

HERAUSGEGEBEN
UNTER MITWIRKUNG EINER VON DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN EINGESETZTEN COMMISSION.

ERSTER BAND.

VORLESUNGEN ÜBER DIE THEORIE
DER EINFACHEN UND DER VIELFACHEN INTEGRALE.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1894.

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

THEORIE DER EINFACHEN UND DER VIELFACHEN INTEGRALE

VON

LEOPOLD KRONECKER.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR EUGEN NETTO,

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT ZU GIESSEN

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1894.

Vorwort.

Aus dem Cyklus von Vorlesungen, welche der bis zum letzten Lebenstage schaffensfreudige Leopold Kronecker an der Berliner Universität gehalten hat, erscheint hier diejenige über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale. Fünfmal hat Kronecker über diesen Gegenstand gelesen; zuerst im Wintersemester 1883/84 zweistündig „über einige bestimmte Integrale"; dann in den Sommersemestern 1885 vierstündig und 1887, 1889, 1891 sechsstündig. Für die Herausgabe lagen Kronecker's Notizen zu sämmtlichen fünf Collegien, sowie die auf seine Veranlassung angefertigten Nachschriften aus den Jahren 1883/84, 1885, 1889 völlig und die aus dem Jahre 1891 zur Hälfte vor.

Wer Kronecker's Vortrags- oder Arbeitsweise kennt, wird wissen, dass einführende, elementare Vorlesungen zu halten, mit seiner Ideenfülle sich nicht vertrug. Mit Hintansetzung peinlich strenger Systematik knüpfte er völlig eigenartig an Untersuchungen an, die ihn augenblicklich beschäftigten, oder er liess sich umgekehrt durch den vorgetragenen Stoff zu eigenen, tiefsinnigen Forschungen anregen und gab dann neue, oft von gestern auf heut gefundene Resultate und Beweise. Man wäre geneigt, seine Vorlesungen „esoterische" zu nennen. So erklärt sich das Anwachsen des Materials bei wiederholten Behandlungen; so das ausführliche Eingehen auf einige Theile des Stoffes gegenüber der kurzen Besprechung anderer Theile; so die vielfachen Umwälzungen und Abänderungen von einem Vorlesungscursus zum andern. So erklärt sich aber auch die ausserordentliche Anregung, die von seinen stets lebensvollen Vorträgen und von seinen weittragenden Bemerkungen ausging.

Und endlich erklären sich so auch die Schwierigkeiten, welche in der Fixirung dieser, in beständigem Flusse befindlichen Vorlesungen lagen, deren Weiterentwickelung nur der Tod des unermüdlichen Forschers hemmen konnte.

Es war bei der Herausgabe nicht möglich, einen bestimmten Cursus — etwa den letzten — als unbedingt massgebend zu Grunde zu

legen, sondern es musste auf die übrigen zurückgegriffen, und ihne
mussten mancherlei Aeusserungen und Gedankenfolgen entnomme
werden. Dies durfte natürlich nur auf Grund sorgfältiger Ueberlegun
geschehen, und mein Hauptbestreben bei jeder nothwendigen Aenderun
war es, die Vorlesungen möglichst charakteristisch zu gestalten, un
möglichst viel von der Eigenart der Kronecker'schen Vortragsweise z
wahren. Ich bin mir wohl bewusst, dass der Werth meiner Arbei
daran abzumessen sein wird, wie weit mir diese schwierige und schön
Aufgabe gelungen ist. Von irgend welchen auf die Sache oder au
die Literatur bezüglichen Zusätzen habe ich völlig Abstand ge
nommen.

Alle Notizen, welche die Herausgabe betreffen, sind in den An
merkungen am Ende des Buches zusammengestellt worden.

Giessen, im October 1893.

Eugen Netto.

Inhaltsverzeichniss.

Erste Vorlesung.

Zwei Definitionen des Integrals. — Historische Bemerkungen. — Beliebige Theilung des Intervalles. — Grenzbegriff. — Stetigkeit. — Bedingung für die Convergenz der Summen. — Differentiation des Integrals. — Grundregeln. — Beispiele.

§ 1.

Euler beginnt seine im Jahre 1768 erschienene Integralrechnung mit folgender Definition: „Calculus integralis est methodus, ex data „differentialium relatione inveniendi relationem ipsarum quantitatum: et „operatio, qua hoc praestatur, integratio vocari solet.“

Wir wollen zunächst auf diese Definition zurückgehen und uns also die Aufgabe stellen: wenn eine Function $f(x)$ gegeben ist, eine Function $F(x)$ so zu bestimmen, dass $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ wird; weiter: wenn eine Function $f(x, y)$ gegeben ist, $F(x, y)$ so zu bestimmen, dass der Bedingung $\frac{d^2F(x, y)}{dx\,dy} = f(x, y)$ genügt wird, u. s. f. bis auf n Variable. In diesen Vorlesungen sollen nur die hier gegebenen speciellen Differentialgleichungen sowie die Probleme, welche dadurch gekennzeichnet sind, behandelt werden. Die Anwendungen dieses Theils der Analysis auf Algebra, Zahlentheorie und Geometrie sind namentlich durch Gauss, Dirichlet und Cauchy sehr umfassende geworden.

Dirichlet hat die Vorlesungen über diesen Zweig der Analysis im Jahre 1842 in Berlin eingeführt, und er hat ihnen den Titel: „Theorie der bestimmten Integrale“ gegeben. Wir haben, an Euler anknüpfend, es vorgezogen, unsere Vorlesungen als „Theorie der einfachen und mehrfachen Integrale“ zu bezeichnen. Der Name „bestimmtes Integral“ erweckt den Anschein, als ob die Grenzen wirklich immer bestimmte Grössen sein müssten, was doch bei sogenannten bestimmten Integralen wie

$$\int_0^\infty f(x)\,dx\,, \quad \int_0^x f(x)\,dx$$

gewiss nicht der Fall ist. Diese Unbestimmtheit der Grenzen bedeutet gerade den Fortschritt von der Praxis zur Theorie, genau wie das

Rechnen mit Buchstaben an Stelle von Zahlen. Es ist ganz gleichgültig, ob die Grenzen bestimmt sind oder nicht; das Bestimmt-Sein ist nicht das Entscheidende, und deshalb haben wir das Wort weggelassen. Ferner soll der Titel anzeigen, dass wir uns nicht mit beliebigen Differential-Gleichungen beschäftigen wollen, deren Behandlung ebenfalls unter die von Euler gegebene Definition fallen würde.

§ 2.

Denken wir uns die Function $f(x)$ gegeben, so lautet die Bedingungsgleichung für die zu bestimmende Function $F(x)$ ausführlich geschrieben folgendermassen:

$$\lim_{h=0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)\,. \tag{1}$$

Hierbei ist eine wesentliche Voraussetzung die, dass $f(x)$ eine eindeutige Function sei. Geht man auf die Bedeutung des limes ein, so besagt (1): „in

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x) + \varphi(x, h) \tag{2}$$

„soll $\varphi(x, h)$ mit h zugleich nach Null convergiren."

Die letzte Gleichung führt uns sofort auf eine Art algebraischer Lösung unseres Problems. Denn gilt sie in einem gewissen Intervall reeller Werthe für x, etwa von x_0 bis x, setzen wir dann:

$$x - x_0 = nh \quad \text{also} \quad h = \frac{x-x_0}{n} \tag{3}$$

und geben dem x in (2) der Reihe nach die Werthe

$$x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h, \ldots\ x_0+(n-1)h,$$

so entsteht:

$$\begin{aligned}
F(x_0+h)-F(x_0) &= hf(x_0) &&+h\varphi(x_0, h)\,,\\
F(x_0+2h)-F(x_0+h) &= hf(x_0+h) &&+h\varphi(x_0+h, h)\,,\\
F(x_0+3h)-F(x_0+2h) &= hf(x_0+2h) &&+h\varphi(x_0+2h, h)\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
F(x_0+nh)-F(x_0+(n-1)h) &= hf(x_0+(n-1)h) &&+h\varphi(x_0+(n-1)h, h)\,,
\end{aligned}$$

und man erhält durch Addition wegen (3):

$$F(x)-F(x_0) = \frac{x-x_0}{n}\sum_{\varkappa=0}^{n-1} f\left(x_0+\varkappa\frac{x-x_0}{n}\right) + \frac{x-x_0}{n}\sum_{\varkappa=0}^{n-1}\varphi\left(x_0+\varkappa\frac{x-x_0}{n},\ \frac{x-x_0}{n}\right). \tag{4}$$

Wir setzen weiter voraus, dass in dem Bereiche von x_0 bis x der Werth von h so klein angenommen werden kann, dass jedes $\varphi(x', h)$ für $x_0 \leqq x' \leqq x$ unterhalb einer vorgeschriebenen kleinen Grösse τ bleibt.

Man sagt, wenn dies eintritt, „der Differenzen-Quotient nähert sich in „dem Intervalle dem Differential-Quotienten gleichmässig". Dann geht (4) über in

$$(4^*) \quad F(x)-F(x_0)=\frac{x-x_0}{n}\sum_{0}^{n-1} f\left(x_0+\varkappa\,\frac{x-x_0}{n}\right)+(x-x_0)\,\varepsilon\tau \quad (0\leq\varepsilon<1).$$

Hier sei ein für alle Mal bemerkt, dass wir bei Summen den Summationsbuchstaben nicht besonders hinschreiben, wenn derselbe ohne weiteres ersichtlich ist. Lässt man jetzt in (4*) den Wert von n mehr und mehr wachsen, so ergiebt sich das Resultat:

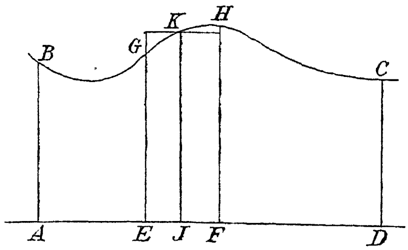
$$(5) \qquad F(x)-F(x_0)=\lim_{n=\infty}\frac{x-x_0}{n}\sum_{0}^{n-1} f\left(x_0+\varkappa\,\frac{x-x_0}{n}\right).$$

Es ist also unter den gemachten Voraussetzungen $F(x)$ als Grenzwerth einer Summe bestimmt worden.

§ 3.

Der Begriff des Integrals als einer Summe ist der historisch ursprüngliche; er findet sich der Sache nach schon in den Büchern des Archimedes. Dieser Mathematiker zerlegt eine, von einer Curve eingeschlossene Fläche zum Zwecke ihrer Quadratur in eine Anzahl gleicher oder ungleicher trapezartiger Figuren, betrachtet den Gesammtinhalt derselben und verfolgt diese Grösse, wenn die Anzahl durch wiederholte Theilung wächst bei gleichzeitig abnehmender Dimension der Grundlinien der einzelnen trapezartigen Theile. Sobald dann Descartes Curven durch Gleichungen darzustellen lehrte, war aus der Flächenberechnung des Archimedes die Berechnung von Integralen geworden.

Bei genauer Betrachtung erweist sich der Archimedische Gedankengang als äusserst merkwürdig. Um den Flächeninhalt $ABCD$ zu finden, theilt man AD in kleine Theile, deren einer EF sei, sucht dann eine Ordinate JK der Art, dass $EGHF = EF\cdot JK$ wird, und bildet nun die Summe aus allen $EF\cdot JK$. Man nimmt also das Problem für ein kleines Stück $EGHF$ bereits als gelöst an. Was ist aber für den Mathematiker „gross" oder „klein"?



Es ist überraschend, dass man in den Naturwissenschaften so oft das „Kleine" gern in den Kauf nimmt, wenn man sich das „Grosse" damit erklären zu können glaubt. Das erinnert an das Goethe'sche Wort:

„Du kannst im Grossen nichts verrichten
„Und fängst es nun im Kleinen an."

So meint man, die Massenattraction begreiflicher zu machen, wenn man einen Attractionsäther annimmt und die Kraft nun von Theilchen zu Theilchen wirken lässt; so „erklärt" die Darwin'sche Theorie die grossen Abweichungen, welche bei den Individuen einer Gattung organischer Wesen auftreten, indem sie lehrt, wie dieselben aus kleinen Aenderungen hervorgehen.

Da es aber bei der praktischen Anwendung der Mathematik stets nur darauf ankommt, von einer Zahl zu wissen, dass sie innerhalb eines bestimmten Intervalles liegt, dessen Grösse von der zu verlangenden Genauigkeit abhängt, so wird uns auch die dargelegte Methode, wie wir sehen werden, in brauchbarer Weise zur Integralfunction verhelfen.

Nach der Methode der Summation, die das Integral liefert, nannte es Leibnitz „functio summatoria" und führte zur Bezeichnung derselben das Summenzeichen $\int$ ein. Bei Leibnitz kann man die Erfindung der Integralrechnung förmlich in ihren einzelnen Stadien verfolgen; die Grösse h, das Stück EF der Grundlinie, wird bei ihm von Jahr zu Jahr kleiner.

Erst Johann Bernoulli legte den Hauptnachdruck auf die Operation des Zurückgehens von einem gegebenen Differentialquotienten auf die ursprüngliche Function und nannte diese daher „integrale", von „integer" das „Ursprüngliche".

Der Sache nach gehört die Integralrechnung eigentlich vor die Differentialrechnung; nur bietet sie grössere Schwierigkeiten als diese, und daher setzt man die Kenntniss der Differentialrechnung lieber voraus.

Dirichlet beginnt seine Vorlesungen mit der Definition des Integrals als Grenzwerth einer Summe, wie wir sie in (5) gegeben haben. Bei Riemann tritt eine scheinbar noch weitere Definition auf, indem die Theile, in welche die Strecke $(x - x_0)$ zerlegt wird, nicht mehr als gleich vorausgesetzt werden. Uebrigens war Riemann nicht der erste, welcher solche Theilungen benutzte; sie finden sich schon bei Gauss in der Abhandlung über mechanische Quadratur.

Wir wollen diese Art der Definition jetzt besprechen und uns dabei der geometrischen Repräsentation bedienen.

§ 4.

Bezieht man die Gleichung $y = f(x)$ auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem der x, y und theilt die Abscissen-Axe von x_0 bis $x = x_{2n}$ in n Theile $x_{2\varkappa} \ldots x_{2\varkappa+2}$; $(\varkappa = 0, 1, 2, \ldots n - 1)$, so werden durch

die x Axe, durch die in den $(n+1)$ Theilpunkten errichteten Ordinaten und durch die Curve $y = f(x)$ als Begrenzungen, n trapezartige Flächenstücke bestimmt. Nimmt man ferner an, dass in den Intervallen zwischen x_0 und x_2; x_2 und x_4; x_4 und x_6; ... Werthe x_1; x_3; x_5; ... von solcher Beschaffenheit bestehen, dass $(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})f(x_{2\varkappa+1})$ gleich dem Inhalte des über der Strecke $(x_{2\varkappa}\ldots x_{2\varkappa+2})$ stehenden Flächenstückes ist, dann wird der gesammte Inhalt der n Stücke, d. h. der Inhalt des Stückes, welches von der x Axe, der Curve $y = f(x)$ und den beiden in x_0 und x_{2n} errichteten Ordinaten begrenzt ist, durch

$$(6) \qquad \sum_0^{n-1}(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})f(x_{2\varkappa+1})$$

genau dargestellt. Das Gleiche findet auch noch statt, wenn man $n = \infty$ werden und dabei die Abscissen-Abschnitte nach der Null hin abnehmen lässt. Der Werth der Fläche ist dann

$$\lim_{n=\infty}\sum_0^{n-1}(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})f(x_{2\varkappa+1}).$$

Nun sind hier freilich die Zwischenwerthe $x_{2\varkappa+1}$ sämmtlich unbekannt; aber es lässt sich nachweisen, dass unter der Voraussetzung der **Stetigkeit** der Function $f(x)$, deren **Eindeutigkeit** wir schon vorausgesetzt haben, irgend zwei Summen

$$(7) \quad \sum_0^{n-1}(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})f(x'_{2\varkappa+1}), \quad \sum_0^{n-1}(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})f(x''_{2\varkappa+1}),$$

in denen $x'_{2\varkappa+1}$, $x''_{2\varkappa+1}$ beliebige Werthe des Intervalles $(x_{2\varkappa}\ldots x_{2\varkappa+2})$ bedeuten, gegen einander convergiren.

Bei stetigem $f(x)$ giebt es in jedem Intervalle Werthe $\xi^0_{2\varkappa+1}$, $\xi_{2\varkappa+1}$, für welche die Beziehungen gelten:

$$f(\xi^0_{2\varkappa+1}) < f(x'_{2\varkappa+1}) < f(\xi_{2\varkappa+1}),$$
$$f(\xi^0_{2\varkappa+1}) < f(x''_{2\varkappa+1}) < f(\xi_{2\varkappa+1});$$

wenn wir nun die „Maximalschwankung" innerhalb des Intervalles $(x_{2\varkappa}\ldots x_{2\varkappa+2})$, nämlich:

$$f(\xi_{2\varkappa+1}) - f(\xi^0_{2\varkappa+1}) = \sigma_\varkappa$$

setzen, so folgt:

$$\sum_0^{n-1}(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})f(\xi^0_{2\varkappa+1}) < \sum_0^{n-1}(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})f(x'_{2\varkappa+1})$$
$$< \sum_0^{n-1}(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})f(\xi_{2\varkappa+1}),$$

$$\sum_0^{n-1}(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})\left[f(\xi_{2\varkappa+1})-\sigma_\varkappa\right] \leqq \sum_0^{n-1}(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})f(x'_{2\varkappa+1})$$
$$\leqq \sum_0^{n-1}(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})f(\xi_{2\varkappa+1}),$$

und also:

$$\sum_0^{n-1}(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})f(x'_{2\varkappa+1})$$
$$=\sum_0^{n-1}(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})f(\xi_{2\varkappa+1})-\delta'\sum_0^{n-1}(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})\sigma_\varkappa$$
$$(0 \leqq \delta' \leqq 1).$$

Aehnlich folgt für die zweite Theilung:

$$\sum_0^{n-1}(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})f(x''_{2\varkappa+1})$$
$$=\sum_0^{n-1}(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})f(\xi_{2\varkappa+1})-\delta''\sum_0^{n-1}(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})\sigma_\varkappa$$
$$(0 \leqq \delta'' \leqq 1).$$

Durch Subtraction der letzten von der vorletzten Gleichung ergiebt sich:

$$(7^*)\sum_0^{n-1}(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})\left[f(x'_{2\varkappa+1})-f(x''_{2\varkappa+1})\right]=\varepsilon\sum_0^{n-1}(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})\sigma_\varkappa$$
$$(-1 \leqq \varepsilon < 1).$$

Rechts steht die Summe aus je einem der aufeinanderfolgenden Abscissentheile multiplicirt mit der grössten Schwankung der auf dieser Strecke vorhandenen Ordinatenwerthe. Bei stetigem $f(x)$ wird diese für $n=\infty$, d. h. bei fortgesetzter Verengerung der Intervalle $(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})$ beliebig klein. Beachtet man, dass damit auch das Maximum σ der $\sigma_\varkappa$ unendlich klein wird, und dass die obige Summe kleiner ist als $(-x_0+x_{2n})\sigma$, so folgt, dass die rechte Seite in (7*) bei stetigem $f(x)$ beliebig klein gemacht werden kann, und dass also irgend zwei Summen (7) bei hinreichend kleinen Intervallen sich von einander um weniger als eine beliebig kleine gegebene Grösse unterscheiden; d. h. „die Summen (7) convergiren gegen einander“.

Wir können die Bedeutung der Summen (7) noch erweitern. Jedem Intervalle $(x_{2\varkappa}\ldots x_{2\varkappa+2})$ ordnen wir ein anderes $(\zeta_{2\varkappa}\ldots\zeta'_{2\varkappa+2})$ zu, welches das erste umfasst, mit ihm gleichzeitig unendlich klein wird, sonst aber willkürlich gewählt werden kann, so dass z. B. die neuen Intervalle $(\zeta_{2\varkappa}\ldots\zeta'_{2\varkappa+2})$, $(\zeta_{2\varkappa+2}\ldots\zeta_{2\varkappa+4})$, ... übereinander greifen dürfen. Für

diese neuen Intervalle seien jetzt die Grössen $\xi^0_{2\varkappa+1}$, $\xi_{2\varkappa+1}$, $\sigma_\varkappa$ genau so definirt, wie früher für die alten. Dann bleiben, auch wenn $x'_{2\varkappa+1}$, $x''_{2\varkappa+1}$ in den neuen, weiteren Intervallen angenommen werden, alle Schlüsse bestehen, und die Formel (7*) gilt in der erweiterten Bedeutung.

Diese Auffassung von (7*) zeigt, dass selbst bei verschiedenen Theilungsgesetzen alle Summen $\Sigma(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})f(x'_{2\varkappa+1})$ gegen einander convergiren. In der That, wenn zwei Theilungen mit den zugehörigen Ordinaten gegeben sind, so kann man zunächst sämmtliche in beiden Theilungen auftretenden Theilpunkte einer dritten und einer vierten neuen Theilung zu Grunde legen. Diese beiden neuen Theilungen lassen sich aber sofort mit den beiden alten identisch machen. Dazu reicht es aus, allen denjenigen Intervallen der dritten (vierten) Theilung, welche aus einem einzigen Intervalle der ersten (zweiten) Theilung entstanden sind, gerade die Ordinate zu geben, welche jenem einen Intervalle der ersten (zweiten) Theilung angehörte. Nun stimmen die beiden neuen Summen mit den beiden alten ihren Werthen nach überein; wegen der Wahl der $x_{2\varkappa+1}$ stehen sie unter der erweiterten Form (7); es gilt also, wie bewiesen werden sollte, auch hier (7*).

Danach ist ersichtlich, dass die speciellere § 2, (5) gegebene Definition vollkommen ausreicht. Ferner ist es klar, dass, wenn die Summe (6) einen bestimmten Grenzwerth hat, welcher dem Inhalte des betrachteten Flächenstückes gleich ist, alle Summen

$$\sum(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})f(x'_{2\varkappa+1})$$

nach demselben Inhalte zu convergiren.

§ 5.

Zu allen den bisherigen Entwickelungen ist zu bemerken, dass die unserer Auffassung zu Grunde liegende Annahme, der Inhalt einer Fläche lasse sich genau durch Zahlen auswerthen, durchaus nicht frei von Bedenken ist. Nur wenn wir von vornherein eine Function $F(x)$ kennen, deren Ableitung gleich der vorgelegten Function $f(x)$ ist, können wir die Existenz eines solchen Grenzwerthes behaupten. Die geometrische Anschauung darf uns nicht dazu verleiten, diese Existenz als selbstverständlich anzusehen. Kennen wir eine Function $F(x)$ nicht, so führt (6) lediglich auf gegen einander convergirende Reihen von Zahlenwerthen, und mit diesen allein dürfen wir rechnen.

Es ist ferner zu beachten, dass bei unseren bisherigen Schlüssen mit grössten und kleinsten Functionswerthen innerhalb der einzelnen Intervalle operirt worden ist. Es fragt sich also, ob die Existenz solcher

Maxima und Minima ohne Weiteres feststeht. Das ist nicht der Fall. Ja, es lässt sich im Gegentheil zeigen, dass bei manchen Functionen $f(x)$ die Operation (6) auf Reihen von Zahlenwerthen führt, die gegen einander convergiren, während die Existenz der Maxima und Minima sich nicht beweisen lässt. Im Allgemeinen kann man die Maxima und Minima nur finden, wenn die Function sich differentiiren lässt; ist dies nicht der Fall, wie in dem von Riemann gegebenen Beispiele der stetigen Function

$$\lim_{n=\infty} \sum_{1}^{n} \frac{\sin \varkappa^2 x}{\varkappa^2},$$

dann dürfen wir auch nicht mit ihnen operiren.

§ 6.

Der schärferen und allgemeineren Fassung des bisher Gegebenen seien einige ausführlichere Erläuterungen bezüglich des Grenzbegriffes vorausgeschickt.

$\psi(m)$ heisse eine Function der positiven Zahl m, wenn ein bestimmtes Rechnungsverfahren festgestellt ist, mittels dessen für jede Zahl $1, 2, 3, \ldots m, \ldots$ der Werth von $\psi(m)$ gefunden werden kann. Es besitzt dann die Gleichung

$$\lim_{m=\infty} \psi(m) = 0$$

folgende Bedeutung: „Wird eine beliebig kleine positive Zahl τ ge- „geben, so ist es möglich, eine Zahl M so gross zu wählen, dass für „jeden Werth von m, der $\geqq M$ ist, $|\psi(m)| < \tau$ wird.“ Dabei bedeuten die Verticalstriche, wie immer im Folgenden, nach dem Vorgange des Herrn Weierstrass, dass der absolute Werth der eingeschlossenen Grösse zu nehmen ist.

Da sich jeder andere Grenzwerth auf Null zurückführen lässt, so kann man bei jeder Grenze die hier gegebene Erklärung zu Grunde legen. So z. B. erhält man bei

$$\lim_{m=\infty} m \sin \frac{v\pi}{m} = v\pi,$$

wenn man

$$m \sin \frac{v\pi}{m} - v\pi = \psi(m)$$

setzt,

$$\lim_{m=\infty} \psi(m) = \lim_{m=\infty} \left(m \sin \frac{v\pi}{m} - v\pi\right) = \lim_{m=\infty} m \sin \frac{v\pi}{m} - v\pi = 0.$$

Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, dass unsere Definition der Grenze keineswegs ein beständiges Abnehmen der Function mit wachsendem m voraussetzt. So ist

$$\lim_{m=\infty} \frac{\sin mx}{m} = 0,$$

obwohl die Function bei wachsendem m auch zunehmen kann.

Die Zurückführung der Grenzwerthe auf 0 geschieht deshalb, um anzuzeigen, dass wir keine neuen Begriffe einführen wollen. Durch den Limes soll keine neue Grösse definirt werden; wir gebrauchen ihn nur, wenn er gleich einer bekannten Grösse ist. —

Hat man in Bezug auf zwei Grössen zur Grenze überzugehen, dann stellt sich die Sache nicht so einfach. Soll

$$\lim_{s=\infty} \lim_{r=\infty} \psi(r, s) = 0 \tag{8}$$

sein, so heisst dies, „wenn

$$\lim_{r=\infty} \psi(r, s) = \Psi(s) \tag{9}$$

„gesetzt wird, dann wird

$$\lim_{s=\infty} \Psi(s) = 0\text{“.} \tag{10}$$

Bei solchen successiven Grenzübergängen ist die Reihenfolge nicht gleichgiltig. Denn es wird z. B.

$$\lim_{s=\infty} \lim_{r=\infty} \frac{s}{r} = 0,$$

da $\lim\limits_{r=\infty} \frac{s}{r} = 0$ ist, also $\Psi(s)$ das s nicht mehr enthält, so dass auch $\lim\limits_{s=\infty} \Psi(s) = 0$ sein muss. Hingegen wird

$$\lim_{r=\infty} \lim_{s=\infty} \frac{s}{r} = \infty$$

werden. Denn die innere Operation führt unabhängig von dem Werthe von r über alle Grenzen hinaus, so dass die Durchführung der äusseren Operation keine Aenderung im Resultate bewirken kann.

Aehnlich ergiebt sich:

$$\lim_{s=\infty} \lim_{r=\infty} \frac{\alpha s + \beta r}{\gamma s + \delta r} = \frac{\beta}{\delta}; \quad \lim_{r=\infty} \lim_{s=\infty} \frac{\alpha s + \beta r}{\gamma s + \delta r} = \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Ein drittes Beispiel liefert uns die Reihe

$$\lim_{N=\infty} \sum_{-N}^{+N} \frac{2 \sin (2\varkappa + 1) v\pi}{(2\varkappa + 1)\pi} = 1 \qquad (0 < v < 1).$$

Differentiirt man sie direct, so wird, wegen ihres constanten Werthes

$$\lim_{v=v_0}\lim_{N=\infty}\sum_{-N}^{+N}\frac{2\sin(2\varkappa+1)v\pi-2\sin(2\varkappa+1)v_0\pi}{(2\varkappa+1)(v-v_0)\pi}=0$$

werden; wenn man jedoch gliedweise differentiirt und dann erst summirt, so folgt:

$$\lim_{N=\infty}\lim_{v=v_0}\sum_{-N}^{+N}2\cos(2\varkappa+1)v\pi\,.$$

Diese Summe lässt sich leicht mit Hülfe von

$$2\sin 2\varphi\cdot\cos(2\varkappa+1)\varphi=\sin(2\varkappa+3)\varphi-\sin(2\varkappa-1)\varphi,$$

$$\sum_{0}^{N}2\sin 2\varphi\cdot\cos(2\varkappa+1)\varphi=\sin(2N+3)\varphi+\sin(2N+1)\varphi$$

in die Form

$$\lim_{N=\infty}\frac{2\sin(2N+1)v_0\pi\cdot\cos v_0\pi}{\sin v_0\pi}$$

bringen; das ist aber eine schwankende Grösse, die z. B. für $v_0=\frac{1}{4}$ abwechselnd zweimal die Werthe $+\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ annimmt, wenn N ganzzahlig wächst. Man sieht also, wie verschieden die Grenzwerthe sich gestalten können. —

Schon bei

$$\lim_{r=\infty}\lim_{s=\infty}\frac{s}{r}=\infty$$

stellte sich eine Schwierigkeit heraus, die darin bestand, dass der Uebergang zur inneren Grenze nicht durchgeführt werden konnte, weil eine solche nicht besteht. In diesem und in ähnlichen Fällen kann man durch Benutzung einer anderen Methode zum Ziele gelangen.

Soll die Gleichung

$$\lim_{s=\infty}\lim_{r=\infty}\psi(r,s)=0 \tag{8}$$

stattfinden, so kann man auch s zuerst beliebig gross annehmen, etwa gleich N; damit (8) gelte, muss es dann für r eine Grenze M der Art geben, dass für jedes $r>M$

$$|\psi(r,N)|<\tau$$

wird, wenn τ eine beliebig kleine gegebene Grösse ist. Dies stimmt mit der ersten Definition überein, falls (9), (10) bestehen, wie leicht zu erkennen ist. Denn man wählt dann auf Grund von (10) zunächst N so grofs, dass

$$|\Psi(N)|<\frac{\tau}{2}$$

wird, und darauf kann man wegen (9) M so bestimmen, dass für jedes $r>M$ auch

$$|\psi(r, N) - \Psi(N)| < \frac{\tau}{2}$$

ist. Die Vereinigung der letzten beiden Ungleichungen liefert nun

$$|\psi(r, N)| < \tau.$$

Was hier für die Grenzen $r = \infty$, $s = \infty$ und den Werth 0 der rechten Seite durchgeführt ist, gilt offenbar in allen anderen Fällen mit einfachen Modificationen.

So findet man

$$\lim_{r=0} \lim_{s=0} \frac{s}{r} = 0,$$

wenn man zuerst r beliebig klein $= \varrho$ wählt und dann σ so annimmt, dass $\sigma < \varrho\tau$ ist. Für jedes $s \leqq \sigma$ wird

$$\frac{s}{r} = \frac{s}{\varrho} < \tau.$$

Dagegen zeigt sich der andere Grenzwerth

$$\lim_{s=0} \lim_{r=0} \frac{s}{r} = \infty,$$

indem man zuerst s beliebig klein $= \sigma$ wählt und dann ϱ so annimmt, dass $\varrho < \sigma\tau$ bleibt. Für jedes $r \leqq \varrho$ wird

$$\frac{s}{r} = \frac{\sigma}{r} > \frac{1}{\tau}.$$

Es wächst also $\frac{s}{r}$ hier über alle Grenzen hinaus.

§ 7.

Damit wir nicht gezwungen sind, spätere Entwickelungen wieder zu unterbrechen, schalten wir gleich hier noch einige Erörterungen über den Begriff der Stetigkeit ein.

Dieser Begriff ist kein ursprünglich arithmetischer, sondern er ist aus den Anwendungen der Analysis auf die Geometrie und Physik entnommen. Seine geometrische und physikalische Bedeutung ist aber sehr dunkel. Eine Curve ist weder, wie man sie zeichnet, noch wie man sie denkt, eigentlich continuirlich; man kann immer nur einzelne bestimmte Punkte — körperlich wie geistig — ins Auge fassen. Und in der Natur scheint einerseits freilich jede Fernwirkung unfassbar, andererseits aber lässt sich ohne Annahme irgend welcher Unstetigkeit in der Raumerfüllung überhaupt keine Ortsveränderung im Raume, d. h. Bewegung, denken.

In der Analysis handelt es sich immer nur um die Stetigkeit von Functionen. Dabei spielte aber lange Zeit hindurch die geometrische Auffassung der Stetigkeit eine Rolle. So kommt bei Gauss der

Begriff Stetigkeit einer Function y von x nur in folgendem Sinne vor: „Geht x von x_0 bis x_1, und nimmt y für diese beiden Werthe der „Variablen die Werthe y_0 und y_1 an, dann giebt es zwischen x_0, x_1 jedes-„mal ein x', für welches die Function den zwischen y_0 und y_1 beliebig „gewählten Werth y' erhält." Es ist dabei an eine Curve gedacht, welche die beiden Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) mit einander verbindet und in ihrem ununterbrochenen Laufe den Verlauf der Functionswerthe darstellt.

Statt dieser geometrischen Veranschaulichung wählen wir eine rein analytische Definition: „$f(x)$ heisst bei einem bestimmten Werthe x „stetig, wenn ein von Null verschiedener, beliebig kleiner, aber end-„licher Werth von h bestimmt werden kann, für welchen die Un-„gleichung gilt:

$$|f(x+h\cdot\varepsilon)-f(x)|<\tau$$
$$(-1\leqq\varepsilon\leqq 1),$$

„wo τ eine beliebig kleine, gegebene Grösse bedeutet."

Wir benutzen ferner die folgenden Begriffe und Definitionen:

„Eine Function $f(x)$ heisst in einem Intervalle gleichmässig „stetig, wenn nach Annahme des τ ein und dasselbe endliche h die obige „Bedingung für jedes x des Intervalles erfüllt."

„Eine Function heisst in einem Intervalle im Allgemeinen gleich-„mässig stetig, wenn die Gesammtgrösse aller Intervalle, in denen die „Bedingung gleichmässiger Stetigkeit nicht erfüllt ist, sich mit τ gleich-„zeitig der Null nähert, also kleiner wird, als eine vorgegebene, beliebig „kleine Grösse." Der Ausdruck „gleichmässig stetig" ist zwar nicht glücklich gewählt, weil eigentlich nur $y = ax + b$ gleichmässig stetig ist, doch wollen wir ihn als eingebürgert beibehalten.

§ 8.

Wir kehren jetzt zur Betrachtung der Integrale zurück und fassen zunächst die Ergebnisse der ersten Paragraphen kurz zusammen.

Wir sahen, dass, „wenn die Function $f(x)$ in dem Bereiche von „x_0 bis $x_{2n} = x$ eindeutig und stetig ist, oder wenn sich in diesem Inter-„valle der Differenzen-Quotient dem Differential-Quotienten gleichmässig „nähert, dann alle Summen

$$\sum_0^{n-1}(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})f(x'_{2\varkappa+1}) \tag{7}$$

„und insbesondere die Summe

$$\sum_0^{n-1}\frac{x-x_0}{n}\,f\Big(x_0+\varkappa\,\frac{x-x_0}{n}\Big) \tag{5}$$

„mit wachsendem n und abnehmender Grösse der Intervalle $(x_{2\varkappa} \ldots x_{2\varkappa+2})$ „gegen einander convergiren.“ Giebt es ferner eine Function $F(x)$, deren Ableitung $\frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$ gleich der gegebenen Function $f(x)$ ist, dann wird

$$(9)\quad \lim_{n=\infty} \sum_0^{n-1} (-x_{2\varkappa} + x_{2\varkappa+2}) f(x'_{2\varkappa+1}) = \lim_{n=\infty} \frac{x-x_0}{n} \sum_0^n f\left(x_0 + \varkappa \frac{x-x_0}{n}\right)$$
$$= F(x) - F(x_0)\,.$$

Für die linke Seite von (9) schreiben wir in der jetzt üblichen, von Fourier zuerst benutzten Bezeichnung:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\,,$$

so dass wir erhalten:

$$(9^*)\qquad \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(x) - F(x_0)\,.$$

Aus § 4 ergiebt sich, dass die notwendige und hinreichende Bedingung für das Convergiren aller Summen (7) gegen einander durch

$$\lim_{n=\infty} \sum_0^{n-1} (-x_{2\varkappa} + x_{2\varkappa+2})\,\sigma_\varkappa = 0$$

gegeben ist. So wurde sie von Riemann aufgestellt. Aber dieser Satz ist im Grunde nur eine Identität; damit lässt sich nichts anfangen; wie überhaupt die Erkenntniss nur fortschreiten kann, wenn man mehr voraussetzt, als nöthig ist. Wir wollen eine nur hinreichende, aber inhaltsreichere und leichter festzustellende Bedingung einführen.

Diese soll so formulirt werden: „die Summen convergiren, falls „$f(x)$ eindeutig, im Allgemeinen gleichmässig stetig ist, und falls sich „eine endliche Grösse M angeben lässt, unter welcher alle Functional„werthe des Bereiches bleiben.“

Die Bestimmung einer solchen Grösse M ist mitunter auch dann möglich, wenn der Nachweis der Existenz von Werten ξ, ξ^0 innerhalb $(x_{2\varkappa} \ldots x_{2\varkappa+2})$, für welche Maxima und Minima im Intervalle auftreten, nicht möglich ist; so z. B. bei dem schon in § 5 angeführten Riemann'schen Beispiele:

$$f(x) = \sum_1^\infty \frac{\sin m^2 x}{m^2}\,. \text{ —}$$

Sind unsere Voraussetzungen erfüllt, dann nehmen wir eine beliebig kleine Grösse τ an und können darauf eine Grösse h so bestimmen, dass im Allgemeinen

$$|f(x+h\varepsilon)-f(x)|<\tau \qquad (-1 \leqq \varepsilon < 1)$$

wird. Die Summe der einzelnen Bereiche, in denen diese Beziehung nicht gilt, werde durch T' bezeichnet; mit abnehmendem τ nimmt auch T' nach Null ab. Die Bereiche, in welchen die obige Beziehung gilt, theilen wir in Intervalle $(x_{2\varkappa} \ldots x_{2\varkappa+2})$, deren Ausdehnung die Grösse h nicht übertrifft, und wählen in jedem Intervalle zwei beliebige Werthe $x'_{2\varkappa+1}$, $x''_{2\varkappa+1}$; dann ist

$$\begin{aligned}-(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})\tau < (-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})(f(x'_{2\varkappa+1})-f(x''_{2\varkappa+1}))\\ < +(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})\tau\end{aligned}$$

und also für die über alle Intervalle dieser Bereiche erstreckte Summe

$$-(x-x_0)\tau < \sum{}'(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})(f(x'_{2\varkappa+1})-f(x''_{2\varkappa+1})) < +(x-x_0)\tau.$$

Für jedes einzelne Theilchen $(x_{2\lambda} \ldots x_{2\lambda+2})$ des Bereiches T' ist

$$\begin{aligned}-(-x_{2\lambda}+x_{2\lambda+2})\cdot 2M < (-x_{2\lambda}+x_{2\lambda+2})(f(x'_{2\lambda+1})-f(x''_{2\lambda+1}))\\ < +(-x_{2\lambda}+x_{2\lambda+2})\cdot 2M,\end{aligned}$$

da ja jedes $f(x)$ kleiner als M ist. Für die sämmtlichen Intervalle auf $(x_0 \ldots x)$ erhält man, da $x_{2\lambda+2}-x_{2\lambda}<h$ ist, durch Addition

$$\begin{aligned}-(x-x_0)\tau-2M\cdot h\,\frac{T'}{h} < \sum_0^{n-1}(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})(f(x'_{2\varkappa+1})-f(x''_{2\varkappa+1}))\\ < +(x-x_0)\tau+2M\cdot h\,\frac{T'}{h}\end{aligned}$$

oder

$$\left|\sum_0^{n-1}(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})(f(x'_{2\varkappa+1})-f(x''_{2\varkappa+1}))\right| < (x-x_0)\tau+2MT'.$$

Lässt man nun τ und damit T' nach Null hin gehen, so folgt aus der letzten Ungleichung der zu beweisende Satz, nämlich dass alle Summen (7) unter den gemachten Voraussetzungen gegen einander convergiren.

§ 9.

Wir wollen jetzt abkürzend

$$\sum_0^n(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})f(x'_{2\varkappa+1}) = \mathfrak{S}_{x_0}^{x_{2n}} f(x)\Delta x \qquad (x_{2n}=x)$$

schreiben und dann nachweisen,

1) dass $\mathfrak{S}$ auch wirklich das Integral der Function $f(x)$ nach der Euler'schen Definition darstellt, d. h. dass

$$\frac{d}{dx}\lim_{n=\infty}\mathfrak{S}_{x_0}^{x_{2n}} f(x)\Delta x = f(x) \qquad (x_{2n}=x)$$

ist; und

2) dass das Integral des Differential-Quotienten einer Function $F(x)$ auch wirklich wieder die Function $F(x) - F(x_0)$ darstellt, d. h. dass

$$\lim_{n=\infty} \mathfrak{S}_{x_0}^{x_{2n}} \frac{dF(x)}{dx} = F(x) - F(x_0) \qquad (x_{2n} = x)$$

wird.

Dabei ist der Limes in Beziehung auf n immer so zu verstehen, dass die Anzahl der Theile wächst und die Ausdehnung der einzelnen Theile abnimmt.

Wir wollen zuerst den Nachweis für die zweite Behauptung unter der Voraussetzung liefern, dass der Differenzen-Quotient von $F(x)$ sich im ganzen Intervalle $(x_0 \ldots x)$ dem Differential-Quotienten gleichmässig nähert. Ich nehme zunächst eine beliebig kleine Grösse τ_0 an; dann kann ich das Intervall in Theile $(x_{2\varkappa} \ldots x_{2\varkappa+2})$ von solcher Ausdehnung zerlegen, dass für einen jeden

$$\left| \frac{F(x_{2\varkappa+1} + \delta_{2\varkappa+1}) - F(x_{2\varkappa+1} - \delta'_{2\varkappa+1})}{\delta_{2\varkappa+1} + \delta'_{2\varkappa+1}} - \frac{F(x_{2\varkappa+2}) - F(x_{2\varkappa})}{x_{2\varkappa+2} - x_{2\varkappa}} \right| = \varepsilon_\varkappa \tau_0$$

$$(0 \leqq \varepsilon_\varkappa < 1)$$

ist, wenn nur $x_{2\varkappa+1} + \delta_{2\varkappa+1}$ und $x_{2\varkappa+1} - \delta'_{2\varkappa+1}$ innerhalb $(x_{2\varkappa} \ldots x_{2\varkappa+2})$ liegen. Multiplicire ich diese Gleichung nun mit $(x_{2\varkappa+2} - x_{2\varkappa})$ und addire für alle $\varkappa$, so folgt

$$\sum_0^{n-1} (-x_{2\varkappa} + x_{2\varkappa+2}) \lim_{\delta, \delta'=0} \frac{F(x_{2\varkappa+1} + \delta_{2\varkappa+1}) - F(x_{2\varkappa+1} - \delta'_{2\varkappa+1})}{\delta_{2\varkappa+1} + \delta'_{2\varkappa+1}}$$

$$= \sum_0^{n-1} (-x_{2\varkappa} + x_{2\varkappa+2}) \frac{F(x_{2\varkappa+2}) - F(x_{2\varkappa})}{x_{2\varkappa+2} - x_{2\varkappa}} + \tau_0 \sum_0^{n-1} \varepsilon'_\varkappa (x_{2\varkappa+2} - x_{2\varkappa})$$

oder

$$\sum_0^{n-1} (-x_{2\varkappa} + x_{2\varkappa+2}) \left(\frac{dF(x)}{dx}\right)_{2\varkappa+1} = F(x) - F(x_0) + \tau_0 \varepsilon' (x - x_0)$$

$$(-1 \leqq \varepsilon', \varepsilon'_\varkappa \leqq +1)$$

und folglich

$$\lim_{n=\infty} \mathfrak{S}_{x_0}^{x_{2n}} \frac{dF(x)}{dx} \Delta x = F(x) - F(x_0);$$

und das ist der zu beweisende Satz. Der Beweis beruht auf gehöriger Verkleinerung der einzelnen Theile $(-x_{2\varkappa} \ldots x_{2\varkappa+2})$, während über δ, δ' keine besonderen Voraussetzungen getroffen wurden. —

Die im ersten Satze ausgesprochene Behauptung können wir auch so formuliren: „Der Differential-Quotient des Integrals nach der oberen

„Grenze ist gleich dem Integranden.“ Ausführlich geschrieben lautet die Formel:

$$\lim_{\delta, \delta'=0} \lim_{n=\infty} \frac{\mathfrak{S}_{x_0}^{x+\delta} f(x) \Delta x - \overline{\mathfrak{S}}_{x_0}^{x-\delta'} f(x) \Delta x}{\delta + \delta'} = f(x).$$

Hier ist die zweite Summe durch ein anderes $\mathfrak{S}$ bezeichnet als die erste, um den Anschein zu vermeiden, als ob bei ihr dieselbe Eintheilung vorausgesetzt würde wie dort. Führen wir die Summen ein, so können wir die linke Seite auch folgendermassen schreiben:

$$\lim_{\delta, \delta'=0} \lim_{m, n=\infty} \frac{1}{\delta+\delta'} \left[\sum_0^{m-1} (-x_{2\varkappa} + x_{2\varkappa+2}) f(x'_{2\varkappa+1}) \right.$$
$$\left. - \sum_0^{n-1} (-x_{2\lambda} + x_{2\lambda+2}) f(x'_{2\lambda+1}) \right],$$

wobei $x_{2m} = x + \delta$, $x_{2n} = x - \delta'$ gesetzt werden muss. Wenn wir jetzt die Annahme machen, dass $f(x)$ an der oberen Grenze stetig ist, dann können wir δ, δ' so wählen, dass die Functionalwerthe innerhalb $(x - \delta' \ldots x + \delta)$ sich von einander um weniger als $\frac{1}{2}\tau$ unterscheiden. Dabei ist τ eine beliebig kleine, vorher gewählte Gröſse. Ist dies geschehen, dann können wir in der ersten Summe die Eintheilung von 0 bis $x - \delta'$ so wählen, dass die zugehörige Partialsumme sich von der zweiten Summe um weniger als eine beliebig kleine Grösse τ_0 unterscheidet. Hierzu reichen unsere Voraussetzungen aus § 8 hin. Endlich wählen wir dann $x'_{2m-1} = x$, und jetzt folgt, dass unser obiger Ausdruck sich von $f(x)$ um weniger als

$$\frac{1}{\delta+\delta'} [(\delta + \delta')(f(x) + \tfrac{1}{2}\tau) + \tau_0] - f(x) = \tfrac{1}{2}\tau + \frac{\tau_0}{\delta+\delta'}$$

unterscheidet. Nehmen wir $\tau_0 = \frac{1}{2}\tau(\delta + \delta')$, so ergiebt dies τ.

Damit ist auch der erste Satz bewiesen. Man bemerke aber wohl, dass man hier gleich anfangs über die Grössen δ, δ' verfügen musste und zwar, ehe man zur Festsetzung der Grösse der Intervalle schreiten konnte, während bei dem Beweise des zweiten Satzes δ und δ' nicht besonders berücksichtigt zu werden brauchten. In beiden Fällen haben wir einen doppelten Grenzübergang; das wird nicht immer genügend beachtet. Allerdings geht in der abgekürzten Schreibweise

$$\lim_{n=\infty} \mathfrak{S}_{x_0}^{x_{2n}} f(x) \Delta x = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$$

der eine Limes unter; vorhanden ist er aber. In dieser Schreibweise lauten unsere Sätze:

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(x)dx = f(x)$$

und

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dF(x)}{dx}\,dx = F(x) - F(x_0)\,.$$

Durch den gelieferten Nachweis haben wir den früheren Euler'schen Standpunkt mit den modernen Anschauungen vereinigt. Wir werden uns weder ausschliesslich der einen noch der andern Integral-Definition anschliessen, sondern wir behalten uns vor, beide je nach Bedürfniss zu benutzen, da hierdurch Schwierigkeiten vermieden werden können, die, wie wir bald sehen werden, sonst auftreten würden.

Wir können endlich noch eine Darstellung des Integrals geben, die des Interesses nicht entbehrt.

Jedes Glied

$$(-x_{2\varkappa} + x_{2\varkappa+2})f(x'_{2\varkappa+1})$$

unserer Summe $\mathfrak{S}$ ist nämlich selbst wieder ein Integral

$$= \int_{x_{2\varkappa}}^{x_{2\varkappa+2}} f(x'_{2\varkappa+1})dx\,,$$

wenn $f(x'_{2\varkappa+1})$ im Integrationsintervalle als constant angesehen wird. Definiren wir also eine Function $f_1(x)$ der Art, dass sie zwischen $x_{2\varkappa}$ und $x_{2\varkappa+2}$, die obere Grenze eingeschlossen, den Wert $f(x'_{2\varkappa+1})$ besitzt, dann erhält man

$$\mathfrak{S}_{x_0}^{x_{2\varkappa}} f(x)\varDelta x = \sum_{0}^{n-1} \int_{x_{2\varkappa}}^{x_{2\varkappa+2}} f_1(x)dx\,.$$

Das links angegebene Integral besteht somit aus einer Summe von Integralen, bei denen die Functionen unter den Integralzeichen längs der einzelnen Teile des Integrationsintervalles constant sind; man erhält bei einer geometrischen Darstellung des Verlaufes der Functionswerthe statt der Curve eine gebrochene Linie, die abwechselnd der Abscissen- und der Ordinaten-Axe parallel läuft und bei beliebig weit fortgesetzter Theilung des Intervalls in immer mehr Punkten mit der durch $y = f(x)$ dargestellten Curve zusammenfällt.

§ 10.

Aus den angegebenen Sätzen folgt ohne Weiteres die Beantwortung der Frage, ob die Euler'sche Aufgabe mehr als eine Lösung zulässt. Man kann nämlich feststellen, wodurch sich zwei Functionen, deren

Differentialquotienten einander gleich sind, von einander unterscheiden können. Soll sowohl

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad \text{als} \quad \frac{d\Phi(x)}{dx} = f(x)$$

sein, so ist

$$\frac{d[F(x) - \Phi(x)]}{dx} = 0$$

und

$$\lim_{n=\infty} \int\limits_{x_0}^{x_{2n}} \frac{d[F(x) - \Phi(x)]}{dx} = 0 \quad (x_{2n} = x).$$

Der Ausdruck hinter dem Limes nähert sich nach § 9 der Grenze

$$F(x_{2n}) - F(x_0) - \Phi(x_{2n}) + \Phi(x_0),$$

wenn sich der Differenzenquotient der Function $F(x) - \Phi(x)$ im Allgemeinen gleichmässig dem Differentialquotienten derselben nähert. Dann ist also, wenn man x für x_{2n} einsetzt,

$$F(x) = \Phi(x) + [F(x_0) - \Phi(x_0)],$$

d. h. die beiden Functionen unterscheiden sich nur durch eine Constante von einander. Unter der angegebenen Voraussetzung giebt es mithin im Wesentlichen nur eine Integralfunction.

Auch die folgenden Fundamentalregeln der Integralrechnung ergeben sich leicht:

I) Es ist

$$(10) \qquad \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx,$$

vorausgesetzt, dass

$$\lim_{n=\infty} \mathfrak{S}_a^b f(x)\,\varDelta x = F(b) - F(a),$$

$$\lim_{n=\infty} \mathfrak{S}_b^c f(x)\,\varDelta x = F(c) - F(b)$$

gesetzt werden kann; denn in diesem Falle ergiebt sich die Identität

$$F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a).$$

II) Unter ähnlichen Voraussetzungen erhält man

$$(11) \qquad \int\limits_a^b \varphi'(x)\,dx + \int\limits_a^b \psi'(x)\,dx = \int\limits_a^b (\varphi'(x) + \psi'(x))\,dx,$$

da die Integration wieder die Identität liefert:

$$(\varphi(b) - \varphi(a)) + (\psi(b) - \psi(a)) = (\varphi(b) + \psi(b)) - (\varphi(a) + \psi(a))$$

III) Die Richtigkeit der Gleichung

$$(12) \qquad \int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

ist nach unseren beiden Definitionen evident, wenn c constant ist.

IV) Ferner sieht man, dass

$$(13) \qquad \int_a^b f'(x)dx = -\int_b^a f'(x)dx$$

ist; denn man erhält hierfür

$$f(b) - f(a) = -(f(a) - f(b)).$$

V) Integrale kann man durch Einführung anderer Variabeln bisweilen vorteilhaft umgestalten.

Führt man in

$$\int_{y_0}^{y_{2n}} g(y)dy = G(y_{2n}) - G(y_0),$$

wo $G(y)$ die Integralfunction von $g(y)$ bedeutet, die neue Variable x durch

$$\varphi(x) = y; \quad \varphi(x_\nu) = y_\nu$$

ein, und ist hier y eindeutig durch x, und ebenso x eindeutig durch y bestimmt, dann wird nach der ersten Definition der Integrale

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} \frac{dG(\varphi(x))}{dx}\, dx = G(\varphi(x_{2n})) - G(\varphi(x_0));$$

rechnet man links den Differentialquotienten aus und kehrt rechts zu y zurück, dann entsteht

$$(14) \qquad \int_{x_0}^{x_{2n}} g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{y_0}^{y_{2n}} g(y)dy.$$

Die Anwendung der zweiten Definition liefert dasselbe Resultat. Denn es ist

$$(14^*) \qquad \sum_0^{n-1}(-y_{2\varkappa} + y_{2\varkappa+2})g(y_{2\varkappa+1})$$
$$= \sum_0^{n-1}(-\varphi(x_{2\varkappa}) + \varphi(x_{2\varkappa+2}))g(\varphi(x_{2\varkappa+1})).$$

Hierin aber lassen wir $y_{2\varkappa+1}$ und damit $x_{2\varkappa+1}$ vorläufig in den erlaubten Grenzen noch unbestimmt. Weil nun, wie aus der Differentialrechnung bekannt ist,

$$\varphi(x_{2\varkappa+2}) - \varphi(x_\varkappa) = (x_{2\varkappa+2} - x_{2\varkappa})\varphi'(\xi_{2\varkappa+1})$$

gesetzt werden kann, wo $\xi_{2\varkappa+1}$ einen passenden Mittelwerth zwischen $x_{2\varkappa}$ und $x_{2\varkappa+2}$ bedeutet, wenn $\varphi(x)$ innerhalb $(x_0 \ldots x_{2n})$ gleichmässig stetig ist, so kann $x_{2\varkappa+1} = \xi_{2\varkappa+1}$ gesetzt und $y_{2\varkappa+1} = \varphi(x_{2\varkappa+1})$ daraus eindeutig bestimmt werden. Hierdurch entsteht

$$\sum_0^{n-1}(-y_{2\varkappa}+y_{2\varkappa+2})g(y_{2\varkappa+1}) = \sum_0^{n-1}(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})\varphi'(x_{2\varkappa+1})g(\varphi(x_{2\varkappa+1})),$$

und dieses Resultat stimmt mit (14) überein.

Insbesondere folgen aus unserer Formel die Gleichungen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = c\int_{\frac{a}{c}}^{\frac{b}{c}} f(cx)\,dx, \tag{15}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx\,. \tag{16}$$

In die Formel (14*) setzen wir statt $g(\varphi(x))$ ein $\psi(x)$:

$$\lim_{n=\infty}\sum_0^{n-1}(-\varphi(x_{2\varkappa}) + \varphi(x_{2\varkappa+2}))\psi(x_{2\varkappa+1}) = \int_{x_0}^{x_{2n}}\varphi'(x)\psi(x)\,dx\,. \tag{17}$$

Hier unterscheidet sich die Summe links von der bei unserer zweiten Definition auftretenden dadurch, dass $(-x_{2\varkappa} + x_{2\varkappa+2})$ durch die Differenz zweier Functionalwerthe $(-\varphi(x_{2\varkappa}) + \varphi(x_{2\varkappa+2}))$ ersetzt ist; (17) liefert also eine Verallgemeinerung jener Definition.

Endlich machen wir von der Transformation noch folgende, häufig zu benutzende Anwendung.

Es sei $f_0(x)$ eine gerade und $f_1(x)$ eine ungerade Function, d. h.

$$f_0(-x) = f_0(x);\quad f_1(-x) = -f_1(x);$$

führt man dann in

$$\int_0^{+a} f_0(x)\,dx\,,\quad \int_{-a}^{+a} f_1(x)\,dx$$

statt x ein $-y$, so folgt, wenn man statt y wieder x schreibt,

$$\int_0^{+a} f_0(x)\,dx = \int_0^{-a} f_0(-x)\,d(-x) = -\int_0^{-a} f_0(x)\,dx = \int_{-a}^0 f_0(x)\,dx\,,$$

$$\int_{-a}^{+a} f_1(x)\,dx = \int_{+a}^{-a} f_1(-x)\,d(-x) = +\int_{+a}^{-a} f_1(x)\,dx = -\int_{-a}^{+a} f_1(x)\,dx$$

und man erhält also

$$\int_0^a f_0(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^a f_0(x)\,dx + \int_{-a}^0 f_0(x)dx\right) = \frac{1}{2}\int_{-a}^{+a} f_0(x)dx\,;$$

und

$$\int_{-a}^{+a} f_1(x)dx = 0\,.$$

VI) Von grossem praktischen Nutzen ist der Satz über partielle Integration; wir können ihn unmittelbar aus der bekannten Differentialformel

$$d(\varphi(x)\psi(x)) = \varphi(x)d\psi(x) + \psi(x)d\varphi(x)$$

ableiten, indem wir sie zwischen den Grenzen a und b integriren:

$$(18)\qquad \int_a^b \varphi(x)d\psi(x) = (\varphi(x)\psi(x))_a^b - \int_a^b \psi(x)d\varphi(x)\,.$$

Durch die Substitution

$$\psi'(x) = \Psi(x)\,;\quad \psi(x) = \int_c^x \Psi(x)dx$$

erhalten wir die neue Form:

$$(19)\ \int_a^b \varphi(x)\Psi(x)dx = \left(\varphi(x)\int_c^x \Psi(x)\,dx\right)_a^b - \int_a^b \left(\varphi'(x)\int_c^x \Psi(x)dx\right)dx\,.$$

Denselben Satz leiten wir mittels der zweiten Definition her, indem wir in die von Abel stammende, noch häufig zu benutzende Identität

$$a_0 b_0 + \sum_1^{n-1} a_{\varkappa-1}(b_\varkappa - b_{\varkappa-1}) = -\sum_1^{n-1}(a_\varkappa - a_{\varkappa-1})b_\varkappa + a_{n-1}b_{n-1}$$

einsetzen:

$$a_\varkappa = \varphi(x_{2\varkappa+1})\,,\quad b_\varkappa = \psi(x_{2\varkappa})$$

und die entstehenden beiden Summen gemäss (17) bei wachsendem n in Integrale übergehen lassen; dabei resultirt

$$\varphi(x_1)\psi(x_0) + \int_{x_0}^{x_{2n}} \varphi(x)d\psi(x) = -\int_{x_0}^{x_{2n}} \psi(x)\,d\varphi(x) + \varphi(x_{2n-1})\psi(x_{2n-2})\,.$$

Hier kann man, da die Theilpunkte beliebig nahe an einander gerückt

werden, statt x_1 eintragen x_0, und statt x_{2n-1} und x_{2n-2} jedesmal x_{2n}; so folgt denn:

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} \varphi(x)\,d\psi(x) = (\varphi(x)\psi(x))_{x_0}^{x_{2n}} - \int_{x_0}^{x_{2n}} \psi(x)\,d\varphi(x)\,,$$

und dies ist bis auf die Bezeichnung der Grenzen mit (18) identisch.

§ 11.

Wir wollen jetzt an einigen Beispielen zeigen, wie sich unser $\mathfrak{S}$ der Integralfunction nähert.

1) Bei $f(x) = x^2$ erhalten wir, falls — wie es gestattet ist — das Intervall $(x_0 \ldots x)$ in gleiche Theile getheilt wird, die Summe

$$\frac{x-x_0}{n}\left[x_0^2 + \left(x_0 + \frac{x-x_0}{n}\right)^2 + \left(x_0 + 2\frac{x-x_0}{n}\right)^2 + \cdots + \left(x_0 + (n-1)\frac{x-x_0}{n}\right)^2\right]$$

$$= \frac{x-x_0}{n}\left[x_0^2 \cdot n + 2x_0\,\frac{x-x_0}{n}\,\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(x-x_0)^2}{n^2}\left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right)\right]$$

$$= (x-x_0)x_0^2 + (x-x_0)^2 x_0\left(1 - \frac{1}{n}\right) + (x-x_0)^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right),$$

und diese wird für $n = \infty$ zu

$$(x-x_0)x_0^2 + (x-x_0)^2 x_0 + \frac{1}{3}(x-x_0)^3 = \frac{1}{3}(x^3 - x_0^3)\,.$$

Wir erhalten also durch Summation als Integral

$$\int_{x_0}^{x} x^2\,dx = F(x) - F(x_0) = \frac{1}{3}(x^3 - x_0^3)\,.$$

2) Bei $f(x) = \cos x$ ist zu bilden:

$$\lim_{n=\infty} \frac{x-x_0}{n}\left[\cos x_0 + \cos\left(x_0 + \frac{x-x_0}{n}\right)\right.$$

$$\left. + \cos\left(x_0 + 2\,\frac{x-x_0}{n}\right) + \cdots + \cos\left(x_0 + (n-1)\,\frac{x-x_0}{n}\right)\right].$$

Da aber die Summe

$$\cos\alpha + \cos(\alpha + v) + \cos(\alpha + 2v) + \cdots + \cos(\alpha + (n-1)v)$$

$$= \frac{\sin\frac{nv}{2}}{\sin\frac{v}{2}}\cos\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\,v\right)$$

ist, so wird der obige Ausdruck zu

$$\lim_{n=\infty} \frac{x-x_0}{n} \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\sin\frac{x-x_0}{2n}} \cos\left(x_0 + \frac{n-1}{2}\frac{x-x_0}{n}\right)$$

$$= 2 \sin \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x+x_0}{2} = \sin x - \sin x_0 ,$$

und wir bekommen in diesem Falle den Werth

$$\int_{x_0}^{x} \cos x \, dx = F(x) - F(x_0) = \sin x - \sin x_0 .$$

Hierbei sei erwähnt, dass die aus

$$\lim_{n=\infty} (\varphi(n) - \psi(n)) = 0$$

folgende Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \varphi(n) = \lim_{n=\infty} \psi(n) ,$$

falls $\varphi(n)$ nicht schon gleich $\psi(n)$ ist, von Paul du Bois-Reymond eine „infinitäre Gleichung" genannt wird; dieser Ausdruck bedeutet also, dass sich, wenn n hinreichend gross gewählt wird, $\varphi(n)$ und $\psi(n)$ um beliebig wenig von einander unterscheiden.

3) Es sei $f(x) = \frac{1}{x}$; dann folgt aus der Euler'schen Definition:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{x} = \log \beta - \log \alpha .$$

Ist $\beta = 1$, $\alpha = 0$, so stellt die Differenz rechts in

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x} = \log 1 - \log 0$$

keinen angebbaren Werth dar. Die in den ersten Beispielen durchgeführte Methode, die Integralfunction zu finden, können wir hier nicht mehr anwenden, da $\frac{1}{x}$ für $x = 0$ nicht mehr unter einer zwar beliebig grossen, aber doch endlichen Grösse bleibt, also auch

$$\mathfrak{S}_0^1 \frac{1}{x} \Delta x$$

keinen angebbaren Werth besitzt. Nimmt man hier statt der unteren Grenze 0 eine beliebig kleine. Grösse δ, so hat die Gleichung

$$\lim_{\delta=0} \lim_{n=\infty} \mathfrak{S}_\delta^1 \frac{1}{x} \Delta x = \lim_{\delta=0} (\log 1 - \log \delta) = - \lim_{\delta=0} \log \delta$$

Gültigkeit, und man erkennt, dass mit $\frac{1}{\delta}$ auch der negative Wert des Integrals über alle Grenzen wächst.

4) Bei $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ hat man zunächst Eindeutigkeit herzustellen. Dies geschieht, indem man ein bestimmtes Vorzeichen der Quadratwurzel als geltend festsetzt, z. B. unter Verwendung der Weierstrass'schen Bezeichnung $|\sqrt{x}|$.

Soll jetzt

$$\int \frac{dx}{|\sqrt{x}|}$$

gebildet werden, so stellt sich an der unteren Grenze dieselbe Schwierigkeit ein, wie im vorigen Beispiele. Wir bilden nun wieder wie oben den Grenzausdruck

$$\begin{aligned}\lim_{\delta=0} \int_{\delta}^{a} \frac{dx}{|\sqrt{x}|} &= \lim_{\delta=0} \lim_{n=\infty} \mathfrak{S}_{\delta}^{a} \frac{\Delta x}{|\sqrt{x}|} \\ &= \lim_{\delta=0} 2 \{ |\sqrt{a}| - |\sqrt{\delta}| \} \\ &= 2 |\sqrt{a}| .\end{aligned}$$

Hier ist der Integralwerth gleich dem Grenzwerthe eines Summengrenzwerthes. Wollte man nach der Dirichlet'schen Anschauung das Integral (wie es nach unseren Auseinandersetzungen nicht möglich ist) mit einem Flächeninhalte und daher mit einem Summengrenzwerthe identificiren, so wäre es überhaupt kein Integral zu nennen, sondern nur der Grenzwerth eines solchen. Riemann nennt in der That, indem er nur auf die Summen-Darstellung Rücksicht nimmt, dies Integral „ein uneigentliches".

Wir knüpfen hieran noch zwei Bemerkungen:

Der letztbehandelte Fall hat uns gezeigt, dass die Euler'sche Definition eine weitere Auffassung des Integralbegriffes liefert, als die neuere; und wie wir schon erwähnten, ist es von Nutzen, beide Definitionen neben einander beizubehalten, um die eine nöthigenfalls durch die andere modificiren zu können.

Ferner beachten wir, dass die durch einen unendlich grossen Functionalwerth eingetretene Schwierigkeit, der wir oben begegneten, sich mitunter durch Transformation des Integrals heben lässt. Führen wir im letzten Beispiele eine neue Variable y durch

$$y = |\sqrt{x}|$$

ein, dann erhalten wir sofort die Umformung in ein „eigentliches Integral",

$$\int_0^a \frac{dx}{|\sqrt{x}|} = \int_0^{|\sqrt{a}|} 2\,dy = 2 |\sqrt{a}| .$$

Wollten wir dagegen im dritten Beispiele bei

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

ähnlich verfahren, indem wir

$$y = \log x$$

nehmen, so würde nur eine Schwierigkeit durch eine andere ersetzt werden, indem die untere Grenze gleich $-\infty$ zu setzen wäre.

Können wir ein „uneigentliches" Integral, wie es in 4) behandelt ist, durch Transformation in ein „eigentliches" umformen, so legen wir ihm den Werth desselben bei. Umgekehrt kann jedes „uneigentliche Integral", welches überhaupt einen Sinn hat, durch eine geeignete Transformation in ein „eigentliches Integral" umgewandelt werden.

Zweite Vorlesung.

Differentiation des Integrals nach einem Parameter. — Doppel-Integral. — Integration eines Integrals. — Vertauschung der Integrations-Folge. — Fixirung des Integrationsbereiches. — Transformation des Doppel-Integrals. — Berechnung des Wahrscheinlichkeits-Integrals.

§ 1.

Wir wollen jetzt das Integral

$$\int_v^w f(x, u)\,dx$$

unter der Voraussetzung, dass u, v, w Functionen einer Variablen t seien, nach diesem t differentiiren. Aus der Erklärung des Differential-Quotienten als Grenzwerthes des Differenzen-Quotienten folgt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_v^w f(x, u)\,dx &= \lim_{\Delta t=0} \frac{1}{\Delta t}\left[\int_{v+\Delta v}^{w+\Delta w} f(x, u+\Delta u)\,dx - \int_v^w f(x, u)\,dx\right]\\ &= \lim_{\Delta t=0} \frac{1}{\Delta t}\left[-\int_v^{v+\Delta v} f(x, u+\Delta u)\,dx + \int_w^{w+\Delta w} f(x, u+\Delta u)\,dx\right.\\ &\qquad\left. + \int_v^w \big(f(x, u+\Delta u) - f(x, u)\big)\,dx\right].\end{aligned}$$

Wenn nun $f(x, u)$ als Function von t in der Nähe des Werthes t, für welchen differentiirt wird, gleichmässig stetig ist, dann unterscheiden sich $f(x, u+\Delta u)$ und $f(x, u)$ beliebig wenig von einander, und

$$\frac{f(x, u+\Delta u) - f(x, u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

nähert sich somit dem Werte

$$\frac{df(x, u)}{du} \cdot \frac{du}{dt};$$

wenn ferner $f(x, u)$ zugleich als Function von x stetig ist, dann nähern sich die beiden ersten Integrale der letzten eckigen Klammer den Werthen

$\varDelta v \cdot f(v, u)$ und $\varDelta w \cdot f(w, u)$, und man erhält also unter den gemachten Voraussetzungen:

$$(1) \quad \frac{d}{dt}\int_v^w f(x, u)\,dx = -f(v, u)\,\frac{dv}{dt} + f(w, u)\,\frac{dw}{dt} + \int_v^w \frac{d}{du} f(x, u) \cdot \frac{du}{dt}\;dx.$$

Sind v und w von t unabhängig, dann vereinfacht sich die Formel zu

$$(1^*) \qquad \frac{d}{dt}\int_v^w f(x, u)\,dx = \int_v^w \frac{df(x, u)}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot dx.$$

§ 2.

Wenn wir die Integration eines Integrals nach einem Parameter vornehmen wollen, etwa

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\,dy,$$

so betreten wir damit das Gebiet der Doppel-Integrale. Wir wollen, einer äusseren Systematik zu Liebe, dem nicht ausweichen, sondern vielmehr die Methoden, welche der Theorie der Doppel-Integrale entstammen, auch in der Theorie der einfachen Integrale verwerthen.

Wir definiren:

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{x_{2m}} \int_{y_0}^{y_{2n}} f(x, y)\,dx\,dy$$
$$= \lim_{m=\infty} \lim_{n=\infty} \sum_{\substack{\varkappa=0\ldots m-1\\ \lambda=0\ldots n-1}} f(x_{2\varkappa+1}, y_{2\lambda+1})(x_{2\varkappa+2} - x_{2\varkappa})(y_{2\lambda+2} - y_{2\lambda})$$

oder auch, den Anschauungen der ersten Vorlesung gemäss,

$$\int_{x_0}^{x_{2m}} \int_{y_0}^{y_{2n}} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{m=\infty} \sum_0^{m-1} \int_{y_0}^{y_{2n}} f(x_{2\varkappa+1}, y)(x_{2\varkappa+2} - x_{2\varkappa})\,dy.$$

Natürlich muss, damit diese Definitionen eine reale Unterlage besitzen, $f(x, y)$ bestimmten Beschränkungen unterworfen werden. Erstens muss $f(x, y)$ innerhalb des Integrationsgebietes, d. h. für alle Werthepaare x, y, für welche $x_0 \leqq x \leqq x_{2m}$; $y_0 \leqq y \leqq y_{2n}$ ist, eindeutig bleiben; und zweitens müssen gewisse Stetigkeitsbedingungen erfüllt sein. Wir setzen voraus, die Function solle gleichmässig oder auch im Allgemeinen gleichmässig stetig sein.

Unter der Stetigkeit bei zwei Variabeln verstehen wir hier Folgendes:

„$f(x, y)$ heiſst bei dem Werthepaare x, y stetig, wenn ein von „Null verschiedener, beliebig kleiner, aber fester Werth von h besteht, „für welchen die Ungleichung gilt:

$$|f(x+h\cdot\delta,\ y+h\cdot\varepsilon)-f(x,y)|<\tau$$
$$(-1\leqq\delta,\ \varepsilon\leqq 1),$$

„wobei τ eine beliebig kleine, endliche Grösse bedeutet."

„Eine Function $f(x, y)$ heisst in einem Intervalle ($x_0 \leqq x \leqq x_{2m}$; „$y_0 \leqq y \leqq y_{2n}$) gleichmässig stetig, wenn nach Annahme des τ ein „und dasselbe endliche h die obige Bedingung für jede Stelle x, y des „Intervalles erfüllt."

„Eine Function $f(x, y)$ heisst in dem Intervalle im Allgemeinen „gleichmässig stetig, wenn die Gesammtfläche aller Stellen, welche „aus dem Gebiete ausgeschlossen werden müssen, um die Function im „Restbereiche zu einer gleichmässig stetigen zu machen, sich mit τ „gleichzeitig der Null nähert."

Für die Convergenz der Doppelsumme (2) ist es hinreichend, dass im Bereiche $x_0 \leqq x \leqq x_{2m}$; $y_0 \leqq y \leqq y_{2n}$ die Function $f(x, y)$ im Allgemeinen gleichmässig stetig sei, und dass die Werthe $f(x, y)$ unterhalb einer angebbaren, endlichen Grenze M bleiben. Der Beweis hierfür läuft dem in § 8 der ersten Vorlesung gegebenen so vollkommen parallel, dass wir ihn hier übergehen können. Die Aufsuchung der nothwendigen und hinreichenden Bedingung würde zu der Einsicht führen, dass mit zunehmender Verkleinerung der einzelnen Intervalle

$$(x_{2\varkappa}\ldots x_{2\varkappa+2};\ y_{2\lambda}\ldots y_{2\lambda+2})$$

die Summe der Producte aus $(-x_{2\varkappa}+x_{2\varkappa+2})\,(-y_{2\lambda}+y_{2\lambda+2})$ und der Maximalschwankung der Function innerhalb des zugehörigen Rechtecks beliebig klein muſs gemacht werden können. Dies ist mit veränderten Worten die Riemann'sche Bedingung auf zwei Variable übertragen.

Wir haben uns bei den jetzigen Betrachtungen von der Forderung gleicher Theilintervalle emancipirt. Wir dürfen noch weiter gehen und auch von der Eintheilung in die Rechtecke mit den Seiten $(x_{2\varkappa}\ldots x_{2\varkappa+2})$, $(y_{2\lambda}\ldots y_{2\lambda+2})$ absehen. Denn wir haben hier zwei Dimensionen zur Verfügung und können daher die Änderungen nicht nur an der Grösse sondern auch an der Gestalt der Theile vornehmen. Ja die Eintheilung braucht nicht einmal das ganze Gebiet zu erschöpfen; es reicht aus, dass die Summe der Producte aus allen ausgeschlossenen Stellen in die grössten zugehörigen Functionalwerthe nach Null convergirt.

§ 3.

Wir können nun die Integration

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\, dy$$

eines Integrals in Angriff nehmen. Es sei $\varphi(x, y)$ die Integralfunction von $f(x, y)dy$ und $\Phi(x, y)$ diejenige von $\varphi(x, y)dx$. Dann ist

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\, dy = \int_{x_0}^{x_1} [\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_0)]\, dx$$
$$= \Phi(x_1, y_1) - \Phi(x_0, y_1) - \Phi(x_1, y_0) + \Phi(x_0, y_0).$$

Ist ähnlich $\psi(x, y)$ die Integralfunction von $f(x, y)dx$ und $\Psi(x, y)$ diejenige von $\psi(x, y)dy$, dann wird

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} f(x, y)\, dx = \int_{y_0}^{y_1} [\psi(x_1, y) - \psi(x_0, y)]\, dy$$
$$= \Psi(x_1, y_1) - \Psi(x_1, y_0) - \Psi(x_0, y_1) + \Psi(x_0, y_0).$$

Um diese beiden Resultate zu vergleichen, differentiiren wir sie nach x_1; dann ergiebt die erste Gleichung, nach § 9 von Vorlesung I

$$\int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\, dy = \frac{\partial \Phi(x_1, y_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi(x_1, y_0)}{\partial x_1},$$

und die zweite, nach § 1 dieser Vorlesung

$$\int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\, dy = \frac{\partial \Psi(x_1, y_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial \Psi(x_1, y_0)}{\partial x_1}.$$

Aus der Gleichheit der linken folgt die der rechten Seiten, und also, wenn man sich x_1 als variabel denkt, nach dem ersten Satze aus § 10 der ersten Vorlesung, dass die beiden Ausdrücke

$$\Phi(x_1, y_1) - \Phi(x_0, y_1) - \Phi(x_1, y_0) + \Phi(x_0, y_0),$$
$$\Psi(x_1, y_1) - \Psi(x_1, y_0) - \Psi(x_0, y_1) + \Psi(x_0, y_0)$$

sich nur um eine Constante von einander unterscheiden können. Diese Constante muss hier den Werth 0 haben, da beide Ausdrücke für $x_1 = x_0$ einander gleich werden. Also ist

$$(3) \qquad \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} f(x, y)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\, dy;$$

dazu müssen nur die Functionen $\Phi(x, y)$, $\Psi(x, y)$ von der angegebenen Eigenschaft

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = f(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} = f(x, y)$$

existiren.

Bei der Definition des Doppelintegrals als Grenzwerth einer Doppelsumme

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\substack{h=0\dots m-1 \\ k=0\dots n-1}} (-x_{2h} + x_{2h+2})(-y_{2k} + y_{2k+2}) f(x_{2k+1}, y_{2k+1})$$

erscheint es selbstverständlich als gleichgültig, ob man zuerst in Beziehung auf h oder zuerst in Beziehung auf k summirt, sobald die Function $f(x, y)$ endlich und nach beiden Dimensionen im Allgemeinen gleichmässig stetig ist.

§ 4.

Bisher wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass die Integrationsgrenzen x_0, x_1; y_0, y_1 von einander unabhängig seien. Ist dies nicht der Fall, und haben wir etwa

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\psi_0(x)}^{\psi_1(x)} f(x, y)\, dy \quad \text{oder} \quad \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{\varphi_0(y)}^{\varphi_1(y)} f(x, y)\, dx\,,$$

so kann man überhaupt nicht mehr davon sprechen, dass man beim ersten Integrale zunächst nach x, beim zweiten zunächst nach y integriren will. Um zu erkennen, in welchem Sinne auch hier von einer Veränderung der Integrations-Reihenfolge die Rede sein kann, wollen wir die geometrische Veranschaulichung der doppelten Integration zu Hülfe nehmen.

Sind die Integrationsgrenzen von einander unabhängig, so erfolgt die Integration über ein Rechteck mit den Eckpunkten x_0, y_0; x_0, y_1; x_1, y_1; x_1, y_0, dessen Seiten also den Coordinatenaxen parallel laufen. Unter $f(x, y)$ kann man dann entweder eine im Punkte x, y errichtete Senkrechte von der Länge $f(x, y)$ verstehen, so dass das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\, dx\, dy$$

als das Volumen eines Raumtheiles auftritt; oder man kann sich auch die Dichtigkeit des Punktes x, y in Beziehung auf Schwere, Elektricität u. dgl. mehr unter $f(x, y)$ denken. Um auszudrücken, dass das Doppel-

integral über alle Punkte des oben beschriebenen Rechtecks zu erstrecken ist, kann man kurz schreiben

$$\int f(x, y)\,dx\,dy\,; \qquad \begin{pmatrix} x_0 \leq x \leq x_1 \\ y_0 \leq y \leq y_1 \end{pmatrix}.$$

Schwieriger wird die Angabe der Begrenzung schon, wenn man das Rechteck schief gegen die Coordinatenaxen legt. Man erkennt es als eine Aufgabe, die durch Ungleichheitsbedingungen zu lösen ist, das Gebiet für (x, y) anzugeben, wenn die Integration sich über eine beliebige geometrische Figur zu erstrecken hat. Ist diese z. B. ein Kreis mit dem Mittelpunkte (ξ, η) und dem Radius r, so wird die Ungleichheitsbedingung gegeben durch

$$[x - \xi]^2 + [y - \eta]^2 < r^2\,.$$

Ist allgemein $G(x, y) = 0$ die Gleichung der Begrenzungscurve des Integrationsgebietes, so wird zu setzen sein

$$(G(x, y) < 0)\,,$$

wenn das Vorzeichen von $G(x, y)$ so gewählt ist, dass die Werthe von G im Innern des Gebietes negativ sind.

Angenähert erhält man dabei den Werth des Integrals, wenn man das Integrationsgebiet irgend wie in beliebige, kleine Flächenelemente theilt, den Inhalt eines jeden dieser Elemente mit dem Werthe von $f(x, y)$ für einen beliebigen Punkt des Flächenelementes multiplicirt, und alle diese Producte dann summirt. Dazu muss nur $f(x, y)$ eine eindeutige, endliche und im Allgemeinen gleichmässig stetige Function sein. Denkt man sich das Gebiet $G(x, y) < 0$ speciell in beliebig kleine Rechtecke durch eine Reihe von Parallelen zur X-Axe und eine andere Reihe von Parallelen zur Y-Axe getheilt, so kann man entweder zuerst für einen bestimmten Werth ξ von x in Beziehung auf alle im Integrationsgebiete liegende, dem ξ zugehörige Werthe von y integriren, dann in dem erhaltenen Resultate das ξ alle ihm möglichen Werthe durchlaufen lassen und so die zweite Integration ausführen; oder man kann umgekehrt verfahren. Entsprechen im ersten Falle einem $x = \xi$ nur zwei Werthe $y = \eta_0$ und η_1, für welche $G(x, y) = 0$ wird, so muss man, falls $\eta_1 > \eta_0$ ist, von η_0 bis η_1 integriren. Entsprechen dagegen einem $x = \xi$ mehrere Werthepaare y, für welche $G(x, y) = 0$ wird, etwa η_0, η_1; η_2, η_3; ..., wobei $\eta_1 > \eta_0$, $\eta_3 > \eta_2$, ... sein soll, so ergeben sich für den Werth ξ ebensoviele einzelne Integrationen, nämlich von η_0 bis η_1, von η_2 bis η_3 u. s. f. Aehnliches gilt auch für unseren zweiten Fall. Immer aber wird man unter den, über $f(x, y)$ gemachten Voraussetzungen bei beiden Summationsarten dieselbe Summe erhalten; es nähert sich bei richtiger Normirung der Summen-Ausdehnung

$$\sum\sum(-x_{2h}+x_{2h+2})(-y_{2k}+y_{2k+2})f(x_{2h+1},y_{2k+1})$$

dem einen wie dem andern der beiden Integrale

$$\int dx\int dy\,f(x,y),\quad \int dy\int dx\,f(x,y);\quad (G(x,y)<0),$$

und diese sind also einander gleich. Diese Vertauschung kann als Transformation $y=x'$, $x=y'$ aufgefasst werden, durch welche das eine der Integrale in das andere übergeführt wird.

§ 5.

Dieser specielle Fall legt uns die Frage nach der allgemeinen Transformation eines Doppelintegrals nahe, welches über ein beliebiges Gebiet $G(x,y)<0$ erstreckt ist, und bei dem somit die Integrationsgrenzen im Allgemeinen nicht von einander unabhängig sind.

Wir nehmen mit dem Doppelintegrale

$$\int dx\,dy\,f(x,y)\qquad (G(x,y)<0)$$

eine beliebige aber eindeutige Transformation vor, indem wir

$$x=\varphi(\xi,\eta),\qquad y=\psi(\xi,\eta)$$

setzen, wo jedoch nicht nur x, y eindeutige Functionen von ξ, η, sondern auch umgekehrt ξ, η ebensolche von x, y sein sollen. Analog der Transformation beim einfachen Integrale können wir die Transformation zunächst etwa bei

$$\int f(x,y)\,dy$$

ausführen, indem wir für y eine neue Veränderliche η einführen, welche durch die obigen Transformationsformeln für x und y bestimmt ist,

$$y=\Theta(x,\eta).$$

Dabei braucht man von einer Elimination des ξ aus den beiden Transformationsformeln nicht zu sprechen; eine solche ist oft unausführbar, während die Abhängigkeit des y von x und η durch jene Formeln vollkommen definirt ist. Zudem ist Elimination meistens mit einem Verluste verbunden, so dass man die Elimination, wenn es irgend angeht, lieber vermeidet. Durch Eintragung des Werthes für y geht das Doppelintegral in

$$\int dx\int f(x,\Theta(x,\eta))\,\frac{\partial\Theta(x,\eta)}{\partial\eta}\,d\eta$$

über, dessen Grenzen durch die Ungleichheitsbedingung

$$G[x, \Theta(x, \eta)] < 0$$

normirt sind. Ehe wir das neue Integral weiter transformiren, haben wir die Integrationsfolge zu vertauschen, was unter der jetzt noch aufzunehmenden Voraussetzung, dass ausser $f(x, y)$ auch $\frac{\partial}{\partial \eta} \Theta(x, \eta)$ eindeutig, endlich und im Allgemeinen stetig sei, thatsächlich gestattet ist. Somit wandelt sich das obige Doppelintegral in

$$\int d\eta \int f(x, \Theta(x, \eta)) \cdot \frac{\partial \Theta(x, \eta)}{\partial \eta} \, dx$$

um. Hier führen wir nun an zweiter Stelle $x = \varphi(\xi, \eta)$ ein und erhalten dadurch

$$\int d\eta \int f\big(\varphi(\xi, \eta),\ \Theta(\varphi(\xi, \eta), \eta)\big) \left[\frac{\partial \Theta(x, \eta)}{\partial \eta}\right]_{x=\varphi(\xi, \eta)} \cdot \frac{\partial \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi} \, d\xi .$$

Dieser Ausdruck ist nach dem Gesichtspunkte umzugestalten, dass im Schlussresultate nur φ, ψ und ihre partiellen Ableitungen nach ξ, η vorkommen dürfen. Vergleicht man Θ und ψ, so folgt

$$\frac{\partial \Theta(x, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta} .$$

Das noch unbekannte $\frac{\partial \xi}{\partial \eta}$ erhält man aus der Gleichung

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$$

unter der Form

$$\frac{\partial \xi}{\partial \eta} = -\left(-\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right) : \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} ;$$

berücksichtigen wir aber, dass in dem Integrale

$$\int dx \int f(x, \Theta(x, \eta)) \frac{\partial \Theta(x, \eta)}{\partial \eta} \, d\eta$$

das x des inneren Integrals constant ist und also in $\frac{\partial \Theta(x, \eta)}{\partial \eta}$ auch als constant betrachtet, d. h. dass $\frac{\partial x}{\partial \eta} = 0$ gesetzt werden muss, so folgt

$$\frac{\partial \Theta(x, \eta)}{\partial \eta} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right] : \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$$

oder kürzer in verständlicher, allgemein üblicher Bezeichnung

$$\frac{\partial \Theta(x, \eta)}{\partial \eta} = (\varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1) : \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} .$$

Hierdurch erhält man das gewünschte Resultat in der Form

$$\int f(\varphi(\xi, \eta),\ \psi(\xi, \eta)) \cdot (\varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1) \cdot d\xi \, d\eta .$$

Jacobi nennt den Ausdruck:

$$\varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1 = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{vmatrix}$$

Functionaldeterminante; die Engländer gebrauchen für ihn die Bezeichnungen Jacobian oder Jacobi'sche Function. Für zweifache und dreifache Integrale wurden die Transformationsformeln schon von Lagrange gegeben, die allgemeinen erst von Jacobi.

Bei dieser Transformation taucht aber noch eine Schwierigkeit auf. Wollen wir z. B.

$$\int\int dx\,dy$$

durch $x = \eta$, $y = \xi$ transformiren, so wird die Functionaldeterminante dabei gleich -1, und man erhält

$$\int\int dx\,dy = -\int\int d\xi\,d\eta\,.$$

Dieses Resultat zeigt sich auf den ersten Blick als falsch. Die Erklärung liegt darin, dass, während beim einfachen Integrale die Grenzen auch den Integrationsweg vorschreiben, dies beim Doppel-Integrale nicht mehr der Fall ist. Wir müssen deshalb festsetzen, dass das Flächenincrement immer positiv sei. Dies erreichen wir dadurch, dass wir der Functionaldeterminante stets ihren absoluten Werth beilegen; die Transformationsformel lautet dann schliesslich:

$$(4) \qquad \int f(x, y)\,dx\,dy = \int f(\varphi(\xi, \eta),\ \psi(\xi, \eta)) \left\| \begin{matrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{matrix} \right\| d\xi\,d\eta.$$

Aus dieser Formel kann man auch sofort schliessen, dass bei constanten Grenzen die Integrationsordnung vertauscht werden darf.

§ 6.

Die abgeleitete Regel für die Transformation der zweifachen Integrale wollen wir zunächst nach dem Vorgange Dirichlet's auf die Berechnung des einfachen Integrals

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \lim_{x=\infty} \int_0^x e^{-x^2} dx = \lim_{x=\infty} F(x)$$

anwenden. Für beliebige Werte x der oberen Grenze lässt sich $F(x)$ zwar in eine convergente Reihe entwickeln aber nicht in geschlossener Form angeben.

Behufs leichterer Berechnung formen wir das Integral durch $x = -x'$ um; dadurch entsteht

$$-\int_0^{-x} e^{-x'^2} dx' = \int_{-x}^0 e^{-x^2} dx\,,$$

folglich

$$F(x) = \int_{-x}^0 e^{-x^2} dx\,,$$

und es kann also (vgl. S. 20, 21)

$$\lim_{x=\infty} 2F(x) = \lim_{\substack{y=\infty \\ y'=\infty}} \int_{-y}^{+y'} e^{-x^2} dx$$

gesetzt werden.

Der Grenzwerth auf der rechten Seite hat einen bestimmten Sinn; denn es lässt sich nachweisen, dass die beiden Integrale

$$\int_{-y}^{+y'} e^{-x^2} dx \quad \text{und} \quad \int_{-y-r}^{+y'+s} e^{-x^2} dx$$

bei beliebigen aber constanten r, s und bei beständig wachsenden y, y' gegen einander convergiren. Da nämlich $e^{-x^2} < e^{-x}$ ist, sobald x ausserhalb des Bereiches $(0 \ldots 1)$ liegt, und da hier y' beliebig gross angenommen werden darf, so hat man

$$\int_{y'}^{y'+s} e^{-x^2} dx < \int_{y'}^{y'+s} e^{-x} dx = -e^{-(y'+s)} + e^{-y'}\,,$$

$$\lim_{y'=\infty} \int_{y'}^{y'+s} e^{-x^2} dx = 0\,;$$

ebenso findet man

$$\lim_{y=\infty} \int_{-y}^{-(y+r)} e^{-x^2} dx = 0\,.$$

Damit ist die aufgestellte Behauptung bewiesen.

Multiplicirt man jetzt das zu berechnende Integral mit sich selbst, so entsteht

$$\lim_{x=\infty} 4F(x)^2 = \lim_{\substack{y=\infty \\ y'=\infty}} \lim_{\substack{h=\infty \\ h'=\infty}} \int_{-h}^{+h'} dy \int_{-y}^{+y'} e^{-(x^2+y^2)} dx\,,$$

und dieses Doppelintegral wird durch Einführung von Polarcoordinaten integrabel. Wir setzen

$$x = r\cos v\,, \quad y = r\sin v$$

und erhalten für die Functional-Determinante

$$\begin{vmatrix} \cos v & -r\sin v \\ \sin v & +r\cos v \end{vmatrix} = r$$

also für den neuen Integranden $e^{-r^2}r$. Nun sind noch die Integrationsgrenzen zu bestimmen. Das Integrationsgebiet für x, y war ein Rechteck, dessen Seiten die Längen $g+g'$ und $h+h'$ hatten und die der X- bezw. Y-Axe parallel waren. Denkt man sich um den Nullpunkt zwei Kreise geschlagen, deren kleinerer ganz in jenem Rechtecke verläuft und dabei die nächstgelegene Seite desselben berührt, während der grössere Kreis das gesammte Rechteck in sich fasst und dabei durch die fernste Ecke desselben geht; bezeichnet man ferner die Radien dieser Kreise mit R_1 und R_2, so liegt das Integrationsgebiet des transformirten Integrals zwischen diesen beiden Kreisen. Man hat demnach, da ja der Integrand stets positiv ist

$$\int_0^{2\pi} dv \int_0^{R_1} e^{-r^2} r\,dr < \int e^{-r^2} r\,dr\,dv < \int_0^{2\pi} dv \int_0^{R_2} e^{-r^2} r\,dr,$$

$$\pi(1-e^{-R_1^2}) < \int e^{-r^2} r\,dr\,dv < \pi(1-e^{-R_2^2}).$$

Hiernach ist, wenn man zur Grenze übergeht,

$$\lim_{x=\infty} \int_{-x}^{+x} e^{-x^2} dx = 2 \lim_{x=\infty} F(x) = |\sqrt{\pi}|,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = |\sqrt{\pi}|, \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{2} |\sqrt{\pi}|. \tag{5}$$

Das berechnete Integral spielt in der Mathematik als „Wahrscheinlichkeitsintegral“ eine grofse Rolle; es ist auch deshalb sehr bemerkenswerth, weil es eins der wenigen ihrem Werthe nach bekannten ist, die sich nicht durch ein, weiterhin zu erwähnendes, sehr allgemein anwendbares Mittel finden lassen.

Die eben verwendete Methode trägt noch weiter. Führen wir in

$$\lim_{x=\infty} \lim_{y=\infty} \int_0^x dx \int_0^y dy\, f(x^2+y^2) = J$$

wie oben Polarcoordinaten ein, dann wird sich ergeben:

$$J = \lim_{r=\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^r f(r^2) r\,dr = \frac{\pi}{4} \lim_{z=\infty} \int_0^z f(z)\,dz,$$

so dass wir das Doppelintegral auf ein einfaches reducirt haben.

Dritte Vorlesung.

Integration eines vollständigen Differentials um ein Rechteck; um ein rechtwinkliges Dreieck; um ein beliebiges Dreieck; um eine beliebige Curve. — Beweis des Satzes für ein Ringgebiet. — Clausius'sche Coordinaten. — Zweiter Beweis des Satzes. — Umformung seiner Voraussetzungen. — Erweiterung des Satzes. — Natürliche Begrenzung. — Functionen complexer Argumente. — Der Cauchy'sche Satz. — Beispiele.

§ 1.

Wir kommen jetzt zu einer der wichtigsten Anwendungen des in der Transformationsformel liegenden Satzes von der Vertauschbarkeit der Integrationsfolgen.

Wir betrachten eine Function $F(x, y)$, deren beide ersten Ableitungen

$$F_1(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}, \qquad F_2(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$$

und deren zweite Ableitung nach x und y, also

$$F_{12} = F_{21} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \cdot \partial x}$$

in dem Integrationsgebiete und auf dessen Grenzen eindeutig, endlich und im Allgemeinen stetig sind. Integriren wir nun F_{12} über ein Rechteck mit den Ecken

$$x_0, y_0; \quad x_1, y_0; \quad x_1, y_1; \quad x_0, y_1,$$

so ergiebt sich einerseits

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} F_{12}(x, y)\, dy = \int_{x_0}^{x_1} dx\, (F_1(x, y))_{y_0}^{y_1}$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} F_1(x, y_1)\, dx - \int_{x_0}^{x_1} F_1(x, y_0)\, dx$$

und andrerseits

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} F_{12}(x, y)\, dx = \int_{y_0}^{y_1} dy\, (F_2(x, y))_{x_0}^{x_1}$$

$$= \int_{y_0}^{y_1} F_2(x_1, y)\, dy - \int_{y_0}^{y_1} F_2(x_0, y)\, dy.$$

Nach unseren Voraussetzungen stimmen beide Resultate mit einander überein, d. h. es besteht die Gleichung

$$(1)\int_{x_0}^{x_1} F_1(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y_1} F_2(x_1, y)dy + \int_{x_1}^{x_0} F_1(x, y_1)dx + \int_{y_1}^{y_0} F_2(x_0, y)dy = 0\,.$$

Nun ist aber

$$\int dF(x, y) = \int F_1(x, y)dx + \int F_2(x, y)dy\,.$$

Setzt man hierin der Reihe nach $x = x_0$ und x_1, also $dx = 0$; und dann $y = y_0$ und y_1, also $dy = 0$, so entstehen die Formeln

$$\int \underset{(x=x_0)}{dF(x, y)} = \int F_2(x_0, y)dy; \quad \int \underset{(x=x_1)}{dF(x, y)} = \int F_2(x_1, y)dy;$$

$$\int \underset{(y=y_0)}{dF(x, y)} = \int F_1(x, y_0)dx; \quad \int \underset{(y=y_1)}{dF(x, y)} = \int F_1(x, y_1)dx\,.$$

Führt man diese Werthe in (1) ein, so erhält man

$$(2)\qquad \int_{x_0}^{x_1} \underset{(y=y_0)}{dF(x, y)} + \int_{y_0}^{y_1} \underset{(x=x_1)}{dF(x, y)} + \int_{x_1}^{x_0} \underset{(y=y_1)}{dF(x, y)} + \int_{y_1}^{y_0} \underset{(x=x_0)}{dF(x, y)} = 0\,.$$

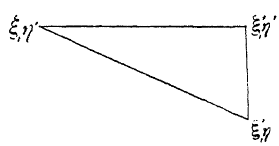
Geometrisch gedeutet heisst das: „Das Integral des vollständigen Diffe-„rentials einer Function von x und y, erstreckt über den Umfang eines „Rechtecks, der Art, dass das Innere immer zur Linken der Fortschritts-„richtung bleibt, hat den Werth Null. Vorausgesetzt ist dabei, dass „die beiden ersten Ableitungen der Function sowie die zweite Ableitung „nach beiden Variablen eindeutig, endlich und im Allgemeinen stetig sind.“

§ 2.

In gleicher Weise wollen wir das Doppelintegral

$$\int\int F_{12}(x, y)dxdy$$

über die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Ecken ξ, η'; ξ', η'; ξ', η erstrecken, wobei $\xi' > \xi$; $\eta' > \eta$ sein soll. Das Dreieck hat also die nebenstehende Lage. Der rechte Winkel liegt an der Ecke ξ', η'; die Katheten sind den Coordinaten-Axen parallel; die Hypotenuse wird



durch die Gleichungen

$$x = \xi + t(\xi' - \xi)\,, \quad y = \eta' + t\,(\eta - \eta')$$
$$(t = 0 \ldots 1)$$

gegeben. Wir bilden nun zunächst das Integral

$$\int_{\xi}^{\xi'} dx \int_{\eta_0}^{\eta'} F_{12}(x, y)\, dy \qquad \left(\eta_0 = \eta' + \frac{x-\xi}{\xi'-\xi}(\eta-\eta') = \eta' + t(\eta-\eta')\right),$$

bei dem die Grenzen so normirt sind, dass das Integrationsgebiet sich über die Dreiecksfläche erstreckt; man erhält dafür den Werth

$$\int_{\xi}^{\xi'} dx (F_1(x, y))_{\eta_0}^{\eta'} = \int_{\xi}^{\xi'} F_1(x, \eta')\, dx + \int_{\xi'}^{\xi} F_1(x, \eta' + t(\eta-\eta'))\, dx .$$

Ebenso ergiebt sich für das Integral

$$\int_{\eta}^{\eta'} dy \int_{\xi_0}^{\xi'} F_{12}(x, y)\, dx \qquad \left(\xi_0 = \xi + \frac{y-\eta'}{\eta-\eta'}(\xi'-\xi) = \xi + t(\xi'-\xi)\right),$$

dessen Integrationsbereich derselbe ist wie der obige, der Werth

$$\int_{\eta}^{\eta'} dy (F_2(x, y))_{\xi_0}^{\xi'} = \int_{\eta}^{\eta'} F_2(\xi', y)\, dy + \int_{\eta'}^{\eta} F_2(\xi + t(\xi'-\xi), y)\, dy .$$

Die Gleichsetzung der beiden Resultate liefert, als Summe geschrieben,

$$0 = \int_{\xi'}^{\xi} F_1(x, \eta')\, dx + \int_{\eta}^{\eta'} F_2(\xi', y)\, dy + \int_{\eta'}^{\eta} F_2(\xi + t(\xi'-\xi), y)\, dy$$
$$+ \int_{\xi}^{\xi'} F_1(x, \eta' + t(\eta-\eta'))\, dx .$$

Genau wie im vorigen Paragraphen ergiebt sich für die beiden ersten Integrale

$$\int_{\xi'}^{\xi} F_1(x, \eta')\, dx = \int_{\xi'}^{\xi} \underset{(y=\eta')}{dF(x, y)}, \quad \int_{\eta}^{\eta'} F_2(\xi', y)\, dy = \int_{\eta}^{\eta'} \underset{(x=\xi')}{dF(x, y)} .$$

Führt man im dritten und im vierten Integrale der Summengleichung t als Variable ein, so geht die Summe dieser beiden in

$$\int_0^1 F_2(\xi + t(\xi'-\xi), \eta' + t(\eta-\eta')) \cdot (\eta-\eta')\, dt$$

$$+ \int_0^1 F_1(\xi + t(\xi'-\xi), \eta' + t(\eta-\eta')) \cdot (\xi'-\xi)\, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial F(x, y)}{\partial t}\, dt = \int dF(x, y)$$

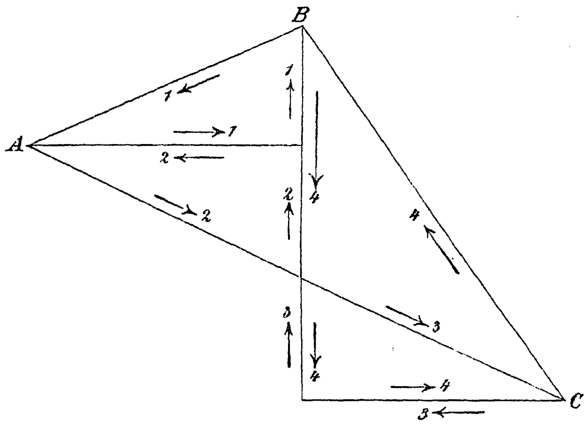
über, wo das letzte Integral in der Art über die Hypotenuse des recht-

winkligen Dreiecks erstreckt ist, dass die Fläche zur Linken der Fortschrittsrichtung bleibt. Damit ist dann der Satz bewiesen, „dass das „Integral

$$\int dF(x, y)$$

„erstreckt über den Umfang unseres rechtwinkligen Dreiecks den Werth „Null besitzt".

Dieser Satz lässt sich ohne Weiteres auf jedes beliebige Dreieck ausdehnen. Denn jedes Dreieck ABC kann in 4 rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden, deren Hypotenusen in die Seiten des gegebenen Dreiecks fallen, und deren Katheten den Coordinaten-Axen parallel laufen. Es reicht dazu aus, durch eine der Ecken, B, eine Parallele zu einer Axe zu ziehen und von den anderen beiden Ecken A und C Senkrechte auf jene Parallele zu fällen.



Integrirt man dann um die vier Dreiecke einzeln so herum, dass bei dem Umfahren der Dreiecksseiten AC, CB, BA die Dreiecks-Fläche ABC zur Linken bleibt, dann heben sich die Integrationen längs der Hülfslinien auf, da eine jede zweimal und zwar in verschiedenen Richtungen durchlaufen wird. Dabei wird die Summe der vier Integrale gleich Null, und dies beweist den ausgesprochenen Satz.

§ 3.

Nunmehr lässt sich der Schluss ziehen, dass überhaupt „das Integral eines vollständigen Differentials unter den für die Function aufgestellten Bedingungen über irgend eine geschlossene Begrenzung in „der Weise erstreckt, dass das eingeschlossene Gebiet stets zur Linken „liegt, den Werth Null erhält". Die zu Grunde gelegten Bedingungen sind ausreichend für die Integrirbarkeit des Differentials, bezw. für die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Integrationen seiner Ableitungen. Wir werden übrigens bald die aufgestellten Bedingungen einer genaueren Betrachtung zu unterziehen haben (vgl. § 7).

Zuerst benutzen wir zum Beweise den Satz aus § 1 über die Integration um die Seiten eines Rechteckes. Wir ziehen in beliebig kleinen Entfernungen δ von einander eine Reihe äquidistanter Parallelen zur X-Axe und zerlegen dadurch das gegebene Gebiet in einzelne Streifen; diese Streifen können wir, wenn nur δ hinlänglich klein ist, ohne merklichen Fehler durch Rechtecke ersetzt denken, welche die innerhalb des Gebietes liegenden Theile je einer Parallelen als Grundlinien haben. Integrirt man dann um jedes einzelne Rechteck so, dass seine Fläche zur Linken bleibt, dann ist die Summe der Integrale gleich Null. Bei den Integrationen zerstören sich diejenigen, welche längs der Parallelen zur X-Axe innerhalb des gegebenen Gebietes verlaufen, da jedesmal sowohl von rechts nach links wie von links nach rechts auf zwei benachbarten Streifen integrirt wird; es bleibt die Integration über eine gebrochene, abwechselnd der X- und der Y-Axe parallele Linie zurück, welche der Curve umbeschrieben ist. Die Integration über dF längs dieser Linie ist also Null. Bei abnehmender Grösse von δ nähert sich diese Linie der gegebenen Curve; und da F_1 und F_2 sich dabei in gleichmässiger Weise denjenigen Werthen nähern, die sie auf der Begrenzung erhalten, so gilt das Theorem, dass

$$\int dF = 0$$

sei, auch bei der Integration um die Curve herum.

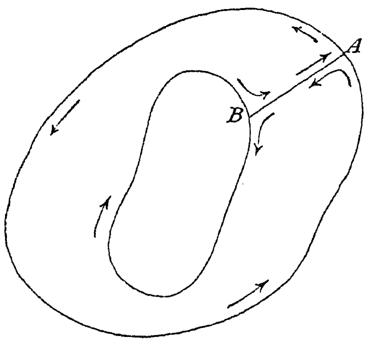
Denselben Satz können wir mit Hülfe des Dreiecks-Satzes aus § 2 nachweisen. Wir zerlegen die Fläche in der Weise, dass wir von einem beliebigen in ihrem Innern gelegenen Punkte aus bis zu den Eckpunkten einer, der Curve einbeschriebenen, gebrochenen Linie Strahlen ziehen. Die einzelnen Seiten dieses Polygons sollen hinreichend klein angenommen werden. Die Summe der über alle so gebildeten Dreiecke sich erstreckenden Integrale hat nach § 2 den Werth 0. Hierbei zerstören sich aber die Integrationen längs der einzelnen Radii-Vectoren, da ja jedes einzelne Dreieck so umlaufen wird, dass seine Fläche zur Linken der Fortschrittsrichtung liegt. Es bleibt also nur die Integration längs der im gleichen Sinne durchlaufenen Curvensehnen zurück; diese liefert folglich auch den Werth 0. Der Uebergang von ihnen zur Curve selbst wird genau so vorgenommen, wie beim ersten Beweise*).

*) Vgl. Kronecker: „Ueber das Cauchy'sche Integral". Monatsber. der Akademie d. Wiss. in Berlin. 1885. S. 785 (30. Juli).

§ 4.

Wir wollen den in Rede stehenden wichtigen Satz auch rein analytisch ableiten. Hierbei mag man sich daran erinnern, dass zur Integration über die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks die Gleichung dieser Geraden in der Form $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ benutzt werden musste. In einer solchen Form muss auch die Gleichung der Integrationscurve $G(x, y) = 0$ gegeben sein, wenn die Integration über den Umfang derselben wirklich ausgeführt werden soll. Dabei sind x und y als eindeutige Functionen von t vorauszusetzen. Diese Annahmen involviren keine besonderen Voraussetzungen; denn, wenn eine solche Darstellung nicht möglich ist, dann lässt sich über das Gebiet überhaupt nichts aussagen.

Den analytischen Beweis können wir bequem in etwas allgemeinerer Weise geben, indem wir statt des bisherigen Integrationsgebietes ein ringförmiges nehmen, dessen äussere Begrenzung durch die gegebene Curve dargestellt wird, während seine innere Begrenzung durch eine beliebige, innerhalb des Gebietes liegende, einfache Curve gebildet werden soll. Wir integriren dann von einem beliebigen Punkte A der äusseren Contour aus in der durch die Pfeile angezeigten Richtung um die äussere Begrenzung herum; dabei bleibt das Innere zur Linken. Ist man nach A zurückgelangt, dann integrirt man von da aus längs einer Strecke AB bis zur inneren Begrenzung; um diese wieder in der Weise, dass die Ringfläche zur linken Hand bleibt bis B; und dann endlich längs BA zum Ausgangspunkte A zurück. Die Integrationen über AB und über BA heben sich dabei auf; das Gesammtresultat ist also eine Integration über die innere und eine über die äussere Begrenzung, wobei diese beiden in entgegengesetztem Sinne ausgeführt sind. Kann man beweisen, dass das Gesammtresultat 0 beträgt, so ist hierin der Beweis des früheren Satzes enthalten. Denn wenn sich die innere Begrenzung auf einen unendlich kleinen Kreis reducirt, dessen Mittelpunkt x_0, y_0 und dessen Radius ϱ sein möge, dann stellt sich unter Einführung von Polarcoordinaten das innere Integral als

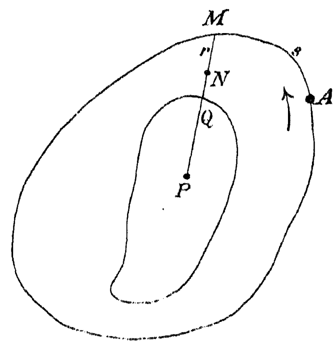


$$\int dF(x, y) = \int \bigl(- F_1(x_0 + \varrho \cos t,\ y_0 + \varrho \sin t) \sin t \\ + F_2(x_0 + \varrho \cos t,\ y_0 + \varrho \sin t) \cos t\bigr) \varrho\, dt$$

dar. Folglich wird es unter unseren Voraussetzungen über F_1 und F_2 wegen des Factors ϱ unendlich klein; damit sind wir dann auf das Theorem des vorigen Paragraphen zurückgekommen.

§ 5.

Um den aufgestellten allgemeineren Satz zu beweisen, führt man am besten ein eigenthümliches Coordinaten-System ein, welches in der Potentialtheorie von Clausius zweckmässig und mit grossem Erfolge benutzt wurde; wir wollen diese Coordinaten als Clausius'sche Coordinaten bezeichnen. Die Benennung ist wohl gerechtfertigt, wenngleich schon Gauss das System der Coordinaten in seiner Abhandlung: Theoria attractionis corporum sphaeroidorum etc. (Werke IV, S. 1) benutzt.



Wir nehmen auf der äusseren Begrenzung einen willkürlichen Punkt A an und rechnen von ihm aus auf der Curve in unserer gebräuchlichen Richtung die Bogenlängen $AM = s$. Dabei können wir den ganzen Umfang der Curve $= 1$ setzen, so dass also s von 0 bis 1 läuft, während M von A aus in der angegebenen Richtung die ganze Curve umkreist. Ferner nehmen wir im Innern der eingeschlossenen Begrenzung einen festen Punkt P an, ziehen den beweglichen, um P drehbaren Radius-Vector PM, welcher die innere Begrenzung in Q schneidet, und bestimmen den auf MQ beweglichen Punkt N durch die Coordinate $r = \frac{MN}{MQ}$. Für die Punkte innerhalb des Ringbereiches variirt somit r von 0 bis 1; alle Punkte der inneren Begrenzung haben $r = 1$, alle der äusseren haben $r = 0$. Dann ist also für jeden Punkt x, y des Ringgebietes

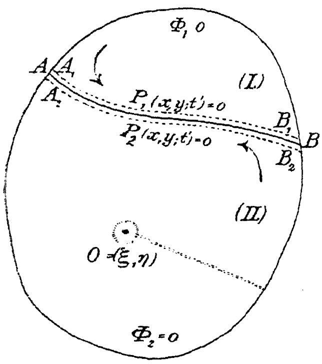
$$x = \varphi(r, s), \quad y = \psi(r, s)$$
$$(r, s = 0 \ldots 1).$$

Wir wollen übrigens, um geometrische Complicationen zu vermeiden, die Voraussetzung machen, dass jeder Radius-Vector nur ein Schnittpunkt-Paar M, Q aufweist. Diese Voraussetzung lässt sich stets durch geeignete Zerlegung des Ringgebietes und passende Wahl der Punkte P verwirklichen. Wir haben dann unter unseren Voraussetzungen φ und ψ als eindeutige Functionen von r, s bestimmt.

Eine solche Coordinaten-Bestimmung wird überall da angebracht sein, wo eine gewisse Begrenzung und ein gewisser Punkt im Innern

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

endlich und eindeutig seien. Dann folgt aus der Endlichkeit der drei zweiten Ableitungen, dass die beiden ersten Ableitungen für denselben Bereich auch stetig sind. Es ersetzen folglich unsere jetzigen Bedingungen die früheren höchstens an denjenigen Stellen nicht, wo $F_{12}(x,y)$ aufhört, eine stetige Function zu sein.



Gesetzt die Stetigkeit von F_{12} hörte in einem Punkte O auf; dann können wir nach dem allgemeineren Satze aus § 5 verfahren und zum Integrale über die äussere Begrenzung noch ein solches über einen beliebig kleinen Kreis hinzu nehmen, der den Punkt O umschliesst. Der Punkt O möge die Coordinaten ξ, η, der Kreis um O den Radius ϱ, und seine Punkte die Coordinaten

$$x = \xi + \varrho \cos v, \quad y = \eta + \varrho \sin v \qquad (v = 0 \ . \ . \ . \ 2\pi)$$

besitzen; dann wird das um den Kreis erstreckte Integral

$$\int_0^{2\pi} (- F_1 \cdot \sin v + F_2 \cdot \cos v) \varrho \, dv$$

wegen der Endlichkeit von F_1 und F_2 und der unendlich kleinen Grösse von ϱ selbst unendlich klein. Der Beitrag, welchen dieses Integral liefert, wenn man um die äussere Begrenzug und um O herum integrirt, verschwindet also; es ersetzen daher in diesem Falle die neuen Bedingungen jene alten. Dasselbe findet statt, wenn in beliebig vielen discreten Punkten des Gebietes die Function F_{12} aufhört, stetig zu sein.

Wenn zweitens die Stetigkeit von F_{12} längs einer Curve AB unterbrochen ist, so zerlegen wir das Gebiet durch zwei dem AB benachbarte Curven A_1B_1 und A_2B_2, deren Gleichungen

$$P_1(x, y; t) = 0, \quad P_2(x, y; t') = 0$$

sind, in drei Theile; t, t' bedeuten dabei zwei Parameter, die so beschaffen sind, dass

$$P_1(x, y; 0) = P_2(x, y; 0) = 0$$

die Gleichung der ausgeschlossenen Curve AB darstellt. Gilt jetzt unser Satz für die Gebiete (I.) und (II.), dann ist

$$\int\limits_{\Phi_1=0} dF + \int\limits_{P_1=0} dF = 0; \quad \int\limits_{P_2=0} dF + \int\limits_{\Phi_2=0} dF = 0,$$

und also folgt für die Summe:

$$\int\limits_{\Phi_1=0} dF + \int\limits_{\Phi_2=0} dF + \Big(\int\limits_{P_1=0} dF + \int\limits_{P_2=0} dF\Big) = 0.$$

Da nun $F_1(x, y)$ und $F_2(x, y)$ stetige Functionen sind, so werden sich bei hinreichend kleinen t, t' die Werthe von dF für $P_1 = 0$ und für $P_2 = 0$ an benachbarten Stellen um beliebig wenig von einander unterscheiden; und weil A_1B_1 und A_2B_2 in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen werden, so erhält man

$$\lim_{t=0} \int\limits_{P_1=0} dF + \lim_{t'=0} \int\limits_{P_2=0} dF = 0.$$

Es gilt deshalb der zu beweisende Satz auch für das ganze Gebiet. Dasselbe findet statt, wenn in beliebig vielen discreten Linien des Gebietes F_{12} aufhört, stetig zu sein.

Wir können also unseren Satz auch so formuliren:

„Erstreckt man das Integral

$$\int dF = \int \left(\frac{\partial F}{\partial x}\, dx + \frac{\partial F}{\partial y}\, dy\right)$$

„über die Begrenzung eines Gebietes, so dass das Innere desselben „stets zur Linken der Fortschrittsrichtung bleibt, und sind für alle „Punkte des Gebietes und seiner Begrenzung die Ableitungen

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}; \quad \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2}$$

„endliche und eindeutige Functionen, dann ist der Werth des Integrals „gleich Null.“

Diesem Satze kann man noch eine andere Wendung geben, wenn man die Begriffe der **Eindeutigkeit** und der **Mehrdeutigkeit** einer Function zweier Variabeln berücksichtigt. Bestimmt man die Werthe einer Function $f(x, y)$ dadurch, dass man aus dem Werthe $f(x_0, y_0)$ für einen bestimmten Punkt x_0, y_0 durch eine eindeutige Operation den für einen benachbarten Punkt x_1, y_1 berechnet, aus diesem ebenso den für einen benachbarten x_2, y_2, u. s. w., und gelangt man beim Fortschreiten nach x_0, y_0 zurück, so kann der erhaltene Werth dem ursprünglichen gleich oder von ihm verschieden sein. Ist das Erste der Fall, wie man auch die Zwischenwerthe innerhalb des Gebietes wählt, dann heisst die Function für dieses Gebiet **eindeutig**. Erhält man dagegen auf irgend einem Wege statt des ursprünglichen Werthes einen davon verschiedenen, dann heisst die Function in dem Gebiete **mehrdeutig**.